UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT M.I

ALGEBRE I

Algèbre I **SEMESTER 1** **2019/2020**

Date: Jeudi 15/10/2020 **Time: 14.00-15.00**
(6.60-6.45 reading time)

Exercice 1 (8 pts). 1. Écrire l'ensemble des parties de $E = \{a, b, c, d\}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2$, et soit $A = [-1, 1]$. Déterminer l'image directe de A par f.
3. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

   1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \to n + 1$,
   2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \to n + 1$.

Exercice 2 (7 pts). 1. Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, anti-symétriques, transitives :

   1. $E = \mathbb{Z}$, et $x\Re y \Leftrightarrow x = -y$,
   2. $E = \mathbb{R}$, et $x\Re y \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 y$.

Exercice 3 (5 pts). Est ce que l'union de deux sous-groupe est un sous groupe? Dans le cas contraire donner un contre exemple.

Corrigé

Exercice 1. (10pts)

1. On classe les parties suivant leur nombre d'éléments :

1. 0 éléments : Il n'y a que l'ensemble vide $\emptyset \rightarrow (0.5pts)$
2. 1 élément : Il y a les 4 singletons : $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\} \rightarrow (0.5pts)$
3. 2 éléments : Il y a 6 parties à 2 éléments : $\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\} \rightarrow (0.5pts)$
4. 3 éléments : Il y a 4 parties à 3 éléments : $\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}. \rightarrow (0.5pts)$
5. 4 éléments : Il n'y a qu'une partie à 4 éléments : l'ensemble E lui-même.$\rightarrow (0.5pts)$

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ x \rightarrow x^2,$ et soit $A = [-1, 1]$. Déterminons l'image directe de A par f.
Par définition on a

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x), x \in A\} \\ &= \left\{x^2, x \in [-1,1]\right\} \end{aligned}$$

c'est à dire on cherche toutes les valeurs prises par x^2 lorsque x parcourt $[-1, 1]$. Entre -1 et 0, ce sont toutes les valeurs qui sont prises entre 0 et 1. On a donc,

$$f(A) = [0, 1]. \rightarrow (2pts)$$

3. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},\ n \rightarrow n + 1,$$

1a. f est injective car

$$\forall n_1,\ n_2 \in \mathbb{N},\ \text{si } f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2 \rightarrow (0.5pts)$$

Alors,

$$\forall n_1,\ n_2 \in \mathbb{N},\ n_1 + 1 = n_2 + 1,$$

d'où

$$n_1 = n_2 \rightarrow (0.5pts)$$

1b. f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent. C'est à dire l'équation $n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}. \rightarrow (0.5pts)$

1c. f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.$\rightarrow (1pt)$

2. g est injective car

$$\forall n_1,\ n_2 \in \mathbb{Z},\ \text{si } g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2. \rightarrow (0.5pt)$$

Alors,

$$\forall n_1,\ n_2 \in \mathbb{Z},\ n_1 + 1 = \ n_2 + 1,$$

d'où

$$n_1 = \ n_2. \rightarrow (0.5pts)$$

1b. g est surjective car

$$\forall\ m \in \mathbb{Z}\ \ \exists\ n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } g(n) = n + 1 = m, \rightarrow (0.5pts)$$

d'où

$$n = m - 1 \in \mathbb{Z}. \rightarrow (0.5pt)$$

1c. g est bijective car g est injective et surjective$\rightarrow (1pt)$.

Exercice 2. (6pts)

1.a La relation $\Re$ n'est pas réflexive, car l'élément 1 n'est pas en relation avec lui-même. En effet, $1 \neq -1 \rightarrow (0.75pts)$

1.b La relation est symétrique car $x \Re y$ implique $x = -y \Rightarrow y = -x \Leftrightarrow y \Re x$ ce qui est absurde.$\rightarrow (0.75pts)$

1.c Elle n'est pas antisymétrique, car $1 \Re - 1$ et $-1 \Re 1$, alors que $1 \neq -1. \rightarrow (0.75pts)$

1.d Elle n'est pas transitive car $1 \Re -1$, $-1 \Re 1$ mais 1 n'est pas en relation avec 1.$\rightarrow (0.75pts)$

1.e Cette relation n'est ni une relation d'équivalence, ni une relation d'ordre.$\rightarrow (0.75pts)$

2. Cette partie doit etre enlever et ajouter $(2.25pts)$**.**

Exercice 3. (4pts)

La réunion de deux sous-groupe n'est pas un sous-groupe . Comme contre exemple on a : $2\mathbb{Z}$ est sous-groupe de $\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ est sous-groupe de $\mathbb{Z}$ mais $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe car il n'est pas stable c'est à dire

$$2 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \text{ et } 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \text{ mais } 5 = 2 + 3 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$$

car l'ensemble $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{Z},\ \text{tel que } a \in 2\mathbb{Z} \text{ ou } a \in 3\mathbb{Z}\}. \rightarrow (4pts)$