Université Badji Mokhtar, Annaba
Faculté des Sciences
Département M.I

16/01/2019

Examen d'algèbre1

Exercice 1. **(7pts).** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

I. Soient les ensembles $A = \left\{-2,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 2\right\}$ et $B = \{4\}$.

(a). Déterminer $f(A) \to$ **(1.5pts)**

(b). En déduire que f n'est pas injective. Justifier.$\to$ **(1.5pts)**

(c). Déterminer $f^{-1}(B)$. $\to$ **(1pt)**

II. On désigne par $\Re$ la relation binaire définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \Re y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

(a). Montrer que $\Re$ est relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. $\to$ **(1.5pts)**

(b). Déterminer les classes d'équivalences de -2, 0 et 2. $\to$ **(1.5pts)**

Exercice 2. **(6pts)** On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition $*$ par $x * y = x + y - 2$.

1. la loi $*$ est elle commutative, associative, possède elle un élément neutre et un élément symétrique ?$\to$ **(3pts)**
2. Soit $n \in \mathbb{N}/\{0\}$. On pose $x^{(1)} = x$ et $x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$
   (a). Calculer $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ et $x^{(4)}$. $\to$ **(1.5pts)**
   (b). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}/\{0\} :\ x^{(n)} = nx - 2(n-1)$. $\to$ **(1.5pts)**

Exercice 3. **(4.5pts)**

1 Est ce que l'ensemble $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \left\{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{4},\ \dot{5}\right\}$ est un anneau intègre ?$\to$ **(1.5pts)**

2. Déterminer la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et quelles sont les éléments non symétrisables.**(1.5pts)**

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation $\left(\dot{x} - \dot{2}\right)\left(\dot{x} - \dot{3}\right) = \dot{0}$. Qu'est ce qu'on déduit ?**(1.5pts)**

Exercice 4. **(3.5pts)**Déterminer le $PGCD$ de A et B avec $A = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $B = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.

Bon courage

Corrigé de l'examen 1

Algèbre 1

Exo 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \to x^3 - x^2 - 4x + 4$$

(a) $f(A) = \{ f(x) , x \in A \}$.

$$= \{ f(-2), f(0), f(1/2), f(2) \}$$

$$= \{ 0, 4, \frac{15}{8} \}$$ 1,5 pts

(b) f n'est pas injective car d'après (a)

on a: $x_1 = 2 \neq x_2 = -2$ mais

$$f(2) = f(-2) = 0 \to$$ 1,5 pts

(c) $f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R} , f(x) \in B \}$.

$$= \{ x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 - 4x + 4 = 4 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}, x(x^2 - x - 4) = 0 \}$$

$$= \{ 0, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \}$$ $\to$ 1,5 pts

II Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}$; $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

(a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

-1- La réflexivité. 0,25 pts

Soit $x \in \mathbb{R}$; comme $f(x) = f(x) \Leftrightarrow x \mathcal{R} x$

d'où la réfléxivité.

-2- La symétrie

Soit $x, y \in \mathbb{R}$; si $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

d'où $f(y) = f(x) \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$.

Alors, $\forall x, y \in \mathbb{R}$; $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

d'où la symétrie. 0,5 pts

-3- La transitivité.

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$: alors, si $\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ \text{et} \\ f(y) = f(z) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = f(z)$ 0,5 pts d'où $x \mathcal{R} z$. Alors, $\mathcal{R}$ est transitive.

de -1-, 2 et 3 nous déduisons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. 0,25 pts

(b) Déterminons les classes d'équivalences de -2, 0 et 2.

-1- $\dot{\overline{-2}} = \{x \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} -2\}$ 0,5 pts

$= \{x \in \mathbb{R} \; f(x) = f(-2) = 0\}$

et d'après la question (a) → I, on déduit que $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x+2)(x-1)$.

Alors, $\dot{\overline{-2}} = \{x \in \mathbb{R} ; \; (x-2)(x+2)(x-1) = 0\}$

$= \{2, -2, 1\}$.

de même pour $\dot{2}$ et $\dot{0}$ on trouve

$\dot{0} = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) = f(0)\} = \{0, \frac{1-\sqrt{15}}{2}, \frac{1+\sqrt{15}}{2}\}$ 0,5 pts

et $\dot{2} = \{2, -2, 1\}$. 0,5 pts

Exo2. On définit sur $\mathbb{R}$ la LCI. $*$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y = x + y - 2$$

1/ (a) La commutativité

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y = x + y - 2 = y + x - 2$$
$$= y * x$$ 0,75 pts

d'où la commutativité.

(b) L'associativité

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$: alors

$$(x * y) * z = (x + y - 2) * z$$
$$= x + y + z - 4 \rightarrow 1$$

d'autre part

$$x * (y * z) = x * (y + z - 2)$$
$$= x + y + z - 4 \rightarrow 2$$ 0,75 pts

de 1 et 2, on déduit que $*$ est associative.

(c) L'élément neutre

Il faut démontrer que :

$\exists e \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x * e = x$

$\Leftrightarrow x + e - 2 = x \Leftrightarrow e = 2 \in \mathbb{R}$ 0,75pts

donc la loi $*$ possède un élement neutre á droit. Comme $*$ est commutative alors, elle possède un élément neutre.

(d) $\underline{\text{L'élément symétrique}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x' \in \mathbb{R},\ x * x' = e$, ?

alors, $x * x' = 2 \Leftrightarrow x + x' - 2 = 2$

$\Leftrightarrow \boxed{x' = -x + 4 \in \mathbb{R}}$ 0,75pts

donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} : x * x' = x' * x = e$

du fait que $*$ est ~~symétri~~ commutative.

-2- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} * x \\ x^{(1)} = x \end{cases}$

(a) Calculons $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ et $x^{(4)}$

$x^{(2)} = x * x = x + x - 2 \Leftrightarrow \boxed{x^{(2)} = 2x - 2}$ 0,5pts

$x^{(3)} = x^{(2)} * x = (2x-2) * x = \boxed{3x - 4}$ 0,5pts

$x^{(4)} = x^{(3)} * x = (3x-4) * x = \boxed{4x - 6}$ 0,5pts

(b) Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x^{(n)} = nx - 2(n-1).$$

On utilisons la récurence, on a :

- pour $n=1$, on $x^{(1)} = x = 1.x - 2(1-1)$ 0,25 pts

donc vérifié

- pour $n=2$, on a : $x^{(2)} = 2x - 2 = 2x - 2(2-1)$ 0,25 pts

vérifié aussi.

Maintenans, supposons qu'elle est vérifié pour n est démontrons qu'elle est aussi pour $n+1$.

Alors, $x^{(n+1)} = x^{(n)} * x = [nx - 2(n-1)] * x$

$$= [nx - 2(n-1)] + x - 2$$

$$= (n+1)x - 2n$$

$$= (n+1)x - 2((n+1) - 1)$$

1 pt

d'où le résultat.

Exo3. 1/ L'anneau $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ n'est pas intègre car pour $\dot{2} \neq \dot{0}$ et $\dot{3} \neq \dot{0}$ on a:

1,5pts

$$\dot{2} \times \dot{3} = \dot{6} = \dot{0}$$

2/

$\times$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	0	0	0	0	0
$\dot{1}$	0	1	2	3	4	$\dot{5}$
$\dot{2}$	0	2	4	0	2	4
$\dot{3}$	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
$\dot{5}$	0	5	4	3	2	1

0,75pts

Les élément non symétrique sont $\{2, 3, 4\}$. car $\nexists\, b \in \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ tel que par exemple $2 \times b = 1$. 0,75pts

(3) Les solutions de l'eqt $(\dot{x}-\dot{2})(\dot{x}-\dot{3}) = \dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ sont

$S = \{\dot{2}, \dot{3}, \dot{0}, \dot{5}\}$. 1,0pts

On déduit qu'on a un polynôme de degré 2 mais il possède 4 racines. 0,5pts

Exo 4 le pgcd de A et B est obtenu à partir de l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{cases} R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1} \\ R_0 = A \text{ et } R_1 = B. \end{cases}$$

0,25 pts

pour $n = 1$, on $R_0 = R_1 Q_1 + R_2 \Leftrightarrow A = BQ_1 + R_2$

$$\begin{array}{l|l} X^4 - 3X^3 + X^2 + 4 & X^3 - 3X^2 + 3X - 2 \\ \cline{2-2} -X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 2X & X \\ \cline{1-1} \underbrace{-2X^2 + 2X + 4}_{R_2 \neq 0} & \end{array}$$

1 pt

pour $n = 2 \Rightarrow R_1 = R_2 Q_2 + R_3$

$$\begin{array}{l|l} X^3 - 3X^2 + 3X - 2 & -2X^2 + 2X + 4 \\ \cline{2-2} -X^3 + X^2 + 2X & -\frac{1}{2}X + 1 \\ \cline{1-1} -2X^2 + 5X - 2 & \\ 2X^2 - 2X - 4 & \\ \cline{1-1} \underbrace{3X - 6}_{R_3 \neq 0} & \end{array}$$

1 pt

pour $n = 3$, on a : $R_2 = R_3 Q_3 + R_4$

$$\begin{array}{l|l} -2X^2 + 2X + 4 & 3X - 6 \\ \cline{2-2} 2X^2 - 4X & -\frac{2}{3}X - \frac{2}{3} \\ \cline{1-1} -2X + 4 & \\ 2X - 4 & \\ \cline{1-1} \Rightarrow R_4 = 0 & \end{array}$$

1 pt

8

Alors, le $\text{pgcd}(A, B) = 3X - 6$ (0,25pts)