UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

SEMESTRE 1 – 2017-2018

1er EXAMEN – ALGEBRE 1

Janvier 2018 Durée: 1h30m

Exercice 1: (6 points) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1. Soient les ensembles: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $B = \{2\}$
   - a) Déterminer $f(A)$.
   - b) En déduire que f n'est pas injective, justifier.
   - c) Déterminer $f^{-1}(B)$.
2. On désigne par $\mathfrak{R}$, la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$
   - a) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
   - b) Déterminer la classe d'équivalence de 0 et -2.

Exercice 2: (7 points)
Soit $G = \mathbb{R} - \{-2\}$, on définit sur G la loi de composition interne $*$ par
$$\forall (x, y) \in G^2, x * y = xy + 2(x + y) + 2.$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.
2. Soit $H = \{x \in \mathbb{R}, x > -2\}$. Montrer que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
3. On considère l'application f du groupe $(G, *)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{R} - \{0\}, \times)$
$$f(x) = x + 2$$
   - a) Montrer que f est un isorphisme de groupes.
   - b) Déterminer le noyau de f $(kcrf)$.

Questions indépendante: (3 points)

1. Est-ce que l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est intègre? (Justifier).
2. Est-ce que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?(Justifier).
3. Est-ce que $2\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}, +, \times)$?(Justifier).

Exercice 3: (4 points)

1. Déterminer le *pgcd* des polynômes A et B suivants
$$A(X) = X^3 - X^2 - 4X + 4 \; et \; B(X) = X^2 + 2X - 3.$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = (X + 1)^n + X^n + 1$ par $Q(X) = X(X + 1)$.

corrigé de l'examen 1 d'algèbre

Exercice 1: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{2\}$

a) $f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\}$ 0,25

$f(-2) = f(1) = 0$

$f(-1) = f(2) = 4$ 0,75 d'où $f(A) = \{0, 2, 4\}$

$f(0) = 2$

b) comme $f(-2) = f(1) = 0$ et $-2 \neq 1$ alors f n'est pas injective 1

c) $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2\}$
$= \{-\sqrt{3}, 0, +\sqrt{3}\}$ 1

2) on a la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par:
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

a) • La réflexivité: $\forall x \in \mathbb{R},\ x \mathcal{R} x$? 0,5
comme $f(x) = f(x)$ alors $x \mathcal{R} x$ d'où $\mathcal{R}$ est réflexive

• La symétrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2,\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ 0,75
on a $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$
d'où $\mathcal{R}$ est symétrique.

• La transitivité: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3,\ x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$
on a $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ 0,75
$\Rightarrow f(x) = f(z) \Leftrightarrow x \mathcal{R} z$ d'où $\mathcal{R}$ est transitive
on conclue que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

b) $\bar{0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \mathcal{R} 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(0) = 2\}$
$= f^{-1}(B) = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ 0,5

$$\overline{(-2)} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \mathcal{R} (-2)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(-2) = 0\}$$
$$= \{-2, 1\} \quad 01$$

Exercice 2 : $G = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\forall (x,y) \in G^2, \; x * y = xy + 2(x+y) + 2$$

- La commutativité : $\forall x, y \in G^2, \; x * y \overset{?}{=} y * x$ 01

$$x * y = xy + 2(x+y) + 2 = yx + 2(y+x) + 2 = y * x$$

d'où $*$ est commutative

- L'associativité : $\forall (x,y,z) \in G^3, \; (x*y)*z \overset{?}{=} x*(y*z)$

$$(x*y)*z = (xy + 2(x+y) + 2) * z = xyz + 2z(x+y) + 2z + 2(xy + 2(x+y) + 2 + z) + 2 = xyz + 2xz + 2yz + 2xy + 4x + 4y + 4z + 6$$

$$x*(y*z) = x*(yz + 2(y+z) + 2) = xyz + 2(y+z) + 2x + 2(x + yz + 2(y+z) + 2) + 2$$
$$= xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4x + 4y + 4z + 6 \quad — ②$$

1

① = ② d'où l'associativité de $*$.

- L'existence du neutre :

$\exists ? e \in G, \forall x \in G$ tq $x * e = e * x = x$

on a $x * e = x \Rightarrow xe + 2(x+e) + 2 = x$

$$\Rightarrow xe + x + 2e + 2 = 0$$
$$\Rightarrow e(x+2) = -(x+2) \Rightarrow \boxed{e = -1} \in G \quad 1$$

Existence du symétrique: $\forall x \in G, \exists ? x^{-1} \in G$ tq $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

on a $x * x^{-1} = e = -1 \Rightarrow x x^{-1} + 2(x + x^{-1}) + 2 = -1$

$\rightarrow x^{-1}(x+2) = -3 - 2x \Rightarrow x^{-1} = \dfrac{-3-2x}{x+2} \overset{?}{\in} G$

on montre que $x^{-1} \in G \Leftrightarrow x^{-1} \neq -2$

on suppose que $x^{-1} = \dfrac{-3-2x}{x+2} = -2 \Rightarrow -3 - \cancel{2x} = -\cancel{2x} - 4$

$\Rightarrow -3 = -4$ c'est absurde

d'où $x^{-1} \in G$.

1

et $\boxed{x^{-1} = \dfrac{-3-2x}{x+2}}$

2. $H = \{x \in \mathbb{R}, x > -2\}$

$(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ ssi $\begin{cases} \cdot\ e \overset{?}{\in} H \\ \cdot\ \forall x, y \in H^2, x * y \overset{?}{\in} H \\ \cdot\ \forall x \in H, x^{-1} \overset{?}{\in} H. \end{cases}$

- $e = -1 \in H \Rightarrow H \neq \phi$ 0,25

- on a $\begin{cases} x \in H \\ \text{et} \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ y > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} xy > 4 \\ x + y > -4 \end{matrix}$ 0,5 $\Rightarrow xy + 2(x+y) + 2 > -2$

$\Rightarrow x * y > -2$

$\Rightarrow x * y \in H$.

- $x \in H \Rightarrow x > -2$ 0,25 on veut démontrer que $x^{-1} > -2$

c.à.d $\dfrac{-3-2x}{x+2} > -2 \Leftrightarrow \dfrac{-3-2x}{x+2} + 2 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2} > 0$

comme $x > -2$ alors $\dfrac{1}{x+2} > 0$ d'où $x^{-1} \in H$.

on déduit que $(H, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$.

3. $f : (G, *) \rightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$

$f(x) = x + 2$.

a) f est un isomorphisme de groupes ssi $\begin{cases} \cdot\ f(x * y) \overset{?}{=} f(x) \times f(y) \\ \cdot\ f \text{ est bijective.} \end{cases}$

$\cdot\ f(x * y) = f(xy + 2(x+y) + 2) = xy + 2(x+y) + 2 + 2$
$= xy + 2(x+y) + 4 \quad \text{--- } (1)$ 1

$f(x) \times f(y) = (x+2)(y+2) = xy + 2x + 2y + 4 \quad \text{--- } (2)$

$(1) = (2)$ d'où $f(x * y) = f(x) \times f(y)$.

$\cdot$ La bijectivité : 1) L'injectivité : $\forall x, x' \in G^2$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x + 2 = x' + \dots$
$\Rightarrow x = x'$

d'où f est injective 0,1

2) La surjectivité : $\forall y \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists ?\, x \in G$ tq $y = f(x)$ 0,1

on a $y = f(x) \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2$.

comme $y \neq 0$ alors $x \neq -2$ d'où $\forall y \in \mathbb{R} - \{0\}$
$\exists x \in G$ tq $y = f(x)$

alors f est surjective et elle est bijective

on conclue que f est un isomorphisme de groupes

b) $\ker f = \{x \in G \,/\, f(x) = 0\} = \emptyset$ 0,1 car $f : G \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$

Question indépendante :

1) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas un anneau intègre car il contient pas des diviseurs de zéro : $\bar{2} \times \bar{3} = \overline{2 \times 3} = \bar{6} = \bar{0}$
contre $\bar{2} \neq \bar{0}$ et $\bar{3} \neq \bar{0}$.

2) $n\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$

car $\cdot\ e = 0 \in n\mathbb{Z} \Rightarrow n\mathbb{Z} \neq \emptyset$

$\cdot\ \forall x \in n\mathbb{Z},\ -x \in n\mathbb{Z}$

$\cdot\ \forall x \in n\mathbb{Z}, \forall y \in n\mathbb{Z},\ x + y \in n\mathbb{Z}$

$(2\mathbb{Z})$ ne peut être un sous-anneau de $\mathbb{Z}$ car $1 \notin 2\mathbb{Z}$

Exercice 3:

1. On applique l'algorithme d'Euclide:

$$\begin{cases} R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1} & n \geq 1. \\ R_0 = A, \; R_1 = B. \end{cases}$$ 0,1

$\cdot \; A = B Q_1 + R_2.$

$$\begin{array}{l|l} A = X^3 - X^2 - 4X + 4 & X^2 + 2X - 3 = B \\ \hline -X^3 - 2X^2 + 3X & X - 3 = Q_1 \\ \hline -3X^2 - X + 4 & \\ 3X^2 + 6X - 9 & \\ \hline 5X - 5 = R_2 & \end{array}$$

0,1

$B = R_2 Q_2 + R_3$

$$\begin{array}{l|l} X^2 + 2X - 3 & \cancel{X} - 1 \\ \hline -X^2 + X & X + 3 = Q_2 \\ \hline 3X - 3 & \\ -3X + 3 & \\ \hline 0 = R_3 & \end{array}$$

0,1

comme $R_3 = 0$ alors

$PGCD(A, B) = R_2 = X - 1$ 0,1

2. Le reste de la division de $P(X) = (X+1)^n + X^n + 1$ par $Q(X) = X(X+1)$

$P = QB + R$ avec $\deg R \leq 1 \Rightarrow R(X) = \alpha X + \beta$ 0,1

$$\Rightarrow \begin{cases} P(0) = B(0)\,Q(0) + R(0) \Rightarrow \boxed{\beta = 2} \\ P(-1) = B(-1)\,Q(-1) + R(-1) \Leftrightarrow (-1)^n + 1 = -\alpha + \beta. \end{cases}$$ 0,1

$\Rightarrow \alpha = 1 - (-1)^n$ 0,1

$$\Rightarrow \boxed{R(X) = [1 - (-1)^n]\, X + 2}$$ 0,1