UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

SEMESTRE 1 – 2016-2017

1[er] EXAMEN – ALGEBRE 1

Janvier 2017 — Durée: 1h30m

Exercice 1

I. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $A = \{0, \frac{1}{2}, 2\}$

a. Déterminer $f(A)$. L'application f est-elle injective?

b. L'application f est-elle surjective?

II. Soit f une application de E dans F. Montrer que pour toute partie B de F

$$Si \ f \ est \ surjective \ alors \ f(f^{-1}(B)) = B.$$

Exercice 2 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\Re$ une relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \Re y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = \lambda(x^2 - y^2)$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. On pose $\lambda = 7$, déterminer la classe d'équivalence de 6.

Exercice 3

I. Soient $H =]-1, 1[$ et $(H, *)$ un groupe abélien où $*$ est défini sur H par:

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab}.$$

Montrer que l'application $f : (\mathbb{R}, +) \to (H, *)$ définie par $f(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$ est un homomorphisme de groupes.

II. Soient $(G, *)$, (G', T) deux groupes et $f : G \to G'$ un homomorphisme de groupes, montrer que

a) $f(e) = e'$, tel que e et e' sont les éléments neutres de $(G, *)$ et (G', T) respectivement.

b) $\forall x \in G, f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, tel que x^{-1} est le symétrique se x par rapport à la loi $*$.

Exercice 4 Déterminer le $pgcd$ D des polynômes A et B suivants

$$A(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1 \ et \ B(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1.$$

Exercice 1

1- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$; $A = \{0, \frac{1}{2}, 2\}$

a. $f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{f(0), f(\tfrac{1}{2}), f(2)\}$
$= \{0, \tfrac{2}{5}\}$

__L'injectivité:__

. comme $f(\frac{1}{2}) = f(2) = \frac{2}{5}$ ($\frac{2}{5}$ possède deux antécédents) (1)

alors f n'est pas injective

2. __La surjectivité:__

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ? x \in \mathbb{R}$ tq $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ ... (*) (1)

(*) $\Rightarrow y x^2 - x + y = 0$, $\Delta = 1 - 4y^2$

pour $y = 1$, $\Delta = -3 < 0$, $\nexists x \in \mathbb{R}$ tq $y = 1$

d'où f n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$.

I. f est surjective $\Rightarrow f(f^{-1}(B)) = B$.

1,5

a) $f(f^{-1}(B)) \subset B$?

Soit $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$, tq $y = f(x)$

$\Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow y \in B$ d'où l'inclusion

b) $B \subset f(f^{-1}(B))$? 1,25

Soit $y \in B$ comme f est surjective alors $\exists x \in E$ tq

$y = f(x) \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ d'où l'inclusion.

et l'égalité.

Réflexivité :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \mathcal{R} x$

On a : $x^3 - x^3 = \lambda (x^2 - x^2)$

$0 = 0$ d'où $x \mathcal{R} x$

Alors $x \mathcal{R} x$

Symétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \; x \mathcal{R} y \Longrightarrow y \mathcal{R} x$?

$\forall x, y \in \mathbb{R} \; ; \; x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow (x^3 - y^3) = \lambda (x^2 - y^2)$

$\Longleftrightarrow -(-x^3 + y^3) = -\lambda (y^2 - x^2)$

$\Longleftrightarrow y^3 - x^3 = \lambda (y^2 - x^2) \Longleftrightarrow y \mathcal{R} x$

Transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \; x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \; x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = \lambda (x^2 - y^2)$ --- ①

1

et $y \mathcal{R} z \Leftrightarrow y^3 - z^3 = \lambda (y^2 - z^2)$ --- ②

① + ② : $(x^3 - y^3) + (y^3 - z^3) = \lambda (x^2 - y^2) + \lambda (y^2 - z^2)$

$\Rightarrow x^3 - z^3 = \lambda (x^2 - z^2) \Leftrightarrow x \mathcal{R} z$.

alors $\mathcal{R}$ est reflexive, symétrique et transitive

d'où elle est d'équivalence

$\lambda = 7$: $\overline{6} = cl(6) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \mathcal{R} 6\}$ 0,5

$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^3 - 6^3 = 7 (x^2 - 6^2)\}$

$x^3 - 6^3 = 7x^2 - (7)(36) \Leftrightarrow x^3 - 216 - 7x^2 + 252 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 36 = 0$

1

$\Leftrightarrow (x - 6)(x^2 - x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 6)(x - 3)(x + 2) = 0$

d'où $\overline{6} = \{6, 3, -2\}$

$f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (H, *)$ tq $f(a) = \dfrac{e^{a} - e^{-a}}{e^{a} + e^{-a}}$

f est un homomorphisme de groupes ssi

$$f(a+b) = f(a) * f(b) \,?$$

$$f(a+b) = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{e^{a+b} + e^{-a-b}} \quad (1)$$

D'autre part

$$f(a) * f(b) = \left(\frac{e^{a} - e^{-a}}{e^{a} + e^{-a}}\right) * \left(\frac{e^{b} - e^{-b}}{e^{b} + e^{-b}}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{e^{a} - e^{-a}}{e^{a} + e^{-a}} + \dfrac{e^{b} - e^{-b}}{e^{b} + e^{-b}}}{1 + \left(\dfrac{e^{a} - e^{-a}}{e^{a} + e^{-a}}\right)\left(\dfrac{e^{b} - e^{-b}}{e^{b} + e^{-b}}\right)} \quad (1)$$

$$= \frac{\dfrac{(e^{a} - e^{-a})(e^{b} + e^{-b}) + (e^{b} - e^{-b})(e^{a} + e^{-a})}{(e^{a} + e^{-a})(e^{b} + e^{-b})}}{\dfrac{(e^{a} + e^{-a})(e^{b} + e^{-b}) + (e^{a} - e^{-a})(e^{b} - e^{-b})}{(e^{a} + e^{-a})(e^{b} + e^{-b})}}$$

$$\frac{e^{a+b} + \cancel{e^{a-b}} - \cancel{e^{b-a}} - e^{-a-b} + e^{a+b} - \cancel{e^{a-b}} - e^{-a-b} + \cancel{e^{b-a}}}{e^{a+b} + \cancel{e^{a-b}} + \cancel{e^{b-a}} + e^{-a-b} + e^{a+b} - \cancel{e^{a-b}} - \cancel{e^{b-a}} + e^{-a-b}}$$

$$\frac{\cancel{2}(e^{a+b} - e^{-a-b})}{\cancel{2}(e^{a+b} + e^{-a-b})} = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{e^{a+b} + e^{-a-b}} = f(a+b)$$

d'où f est bien un homomorphisme de groupes.

$f(e) \top f(e) = f(e * e)$ comme f est un homomorphisme de groupes

$= f(e)$

$= f(e) \top e'$

par régularité de $f(e)$ dans G'

$f(e) \top f(e) = f(e) \top e' \Rightarrow f(e) = e'$

$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$?

on a $f(x) \top f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$

autre part $f(x^{-1}) \top f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e) = e'$

d'où $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Exercice 4 (: 05)

On utilise l'algorithme d'Euclide

$$\begin{cases} R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1} & , n \geq 1 \\ R_0 = A \text{ et } R_1 = B \end{cases}$$

$A = B Q_1 + R_2$

$$\begin{array}{l|l} x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 & x^5 - x^4 + 2x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^5 + x^4 - 2x^2 + 2x - 1 & 1 \\ \hline 2x^3 - 4x^2 + 4x - 2 & \end{array}$$

1,5

$R_2 \neq 0$

d'où $A = B \times \underbrace{1}_{Q_1} + \underbrace{(2x^3 - 4x^2 + 4x - 2)}_{R_2}$

$B = R_2 Q_2 + R_3$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - x^4 + 2x^2 - 2x + 1 & 2x^3 - 4x^2 + 4x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ \cline{1-1}
x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 & \\
-x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x & \\ \cline{1-1}
x^2 - x + 1 &
\end{array}$$

1,5

d'où $B = (2x^3 - 4x^2 + 4x - 2)\underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)}_{Q_2} + \underbrace{x^2 - x + 1}_{R_3}$

$R_2 = R_3 Q_3 + R_4$

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 - 4x^2 + 4x - 2 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 2x^2 - 2x & 2x - 2 \\ \cline{1-1}
-2x^2 + 2x - 2 & \\
2x^2 - 2x + 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

1

$R_4 = 0$ alors PGCD $= R_3 = x^2 - x + 1$

0,5