

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

Département d'Informatique.

Module:Algèbre 1 (S₁-1^{re} Année LMD, MI)

Durée: 00^h:15^m

Contrôle (2020 – 2021)

Exercice 1: (14pts)

1) Ecrire les négations des énoncés suivants et dire s'ils sont vrais ou faux

$$P_1 : ((5 - 2 = 7) \wedge (1 + 3 \leq 0)) \vee (\overline{5 \times 6 = 11})$$

$$P_2 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x \leq n$$

2) Soient P, Q deux propositions. Montrer qu'on a l'équivalence: $(P \Rightarrow \overline{Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par disjonction de cas que $(n + 1)(n + 2)$ est pair.

Bon courage.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

Département d'Informatique.

Module:Algèbre 1 (S₁-1^{re} Année LMD, MI), Durée: 01^h:00^m

Examen Final (2020 – 2021)

Exercice 01:(10pts)

Soit $g : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

1) Déterminer $g(\{-1, 0, 1\})$ et $g^{-1}(\{\frac{1}{2}, 2\})$.

2) g est-elle injective? Est-elle surjective? Est-elle bijective? (Justifier).

3) Soit $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, f(x) = g(x).$$

Montrer que f est bijective.

Exercice 02:(10pts)

Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{Z}^2 par :

$$\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2 : (a, b) \mathcal{R} (a', b') \iff (a \leq a' \text{ et } a + b = a' + b')$$

1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur \mathbb{Z}^2 .

2) Est-ce-que $((3, 0) \mathcal{R} (1, 1) \vee (1, 1) \mathcal{R} (3, 0))$ est vrai? (Justifier).

3) En déduire que l'ordre est partiel

Bon courage.

Département d'Informatique.

Module: Algèbre 1 (S₁-1^{re} Année LMD, MI)

Durée: 00^h:15^m

Corrigé du Contrôle (2020 – 2021)

Exercice 1:(14pts)

1) $\overline{P_1} : ((5 - 2 \neq 7) \vee (1 + 3 > 0)) \wedge (5 \times 6 = 11)$(2pts)

$\overline{P_1}$ est fausse.....(1pt)

$\overline{P_2} : \exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x > n$(2pts)

$\overline{P_2}$ est fausse.....(1pt)

2)

P	Q	\overline{P}	\overline{Q}	$P \Rightarrow \overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$(P \Rightarrow \overline{Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

.....(1pt)+(1pt)+(1pt)+(1pt)+(1pt)

Alors l'équivalence $(P \Rightarrow \overline{Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$ est toujours vraie.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1^{er} cas: Si n est pair, c.à.d: $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$,

alors $(n+1)(n+2) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$ qui est pair.....(1.5pt)

2^{ème} cas: Si n est impair, c.à.d: $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1$,

alors $(n+1)(n+2) = (2k+2)(2k+3) = 2(k+1)(2k+3)$ qui est pair.....(1.5pt)

Par suite, dans tous les cas $(n+1)(n+2)$ est pair.

Département d'Informatique.

Module: Algèbre 1 (S₁-1^{re} Année LMD, MI)

Durée: 01^h:00^m

Corrigé de l'Examen Final (2020 – 2021)

Exercice 01:(10pts)

Soit $g : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

1) $g(-1) = \frac{1}{4}$, $g(0) = -\frac{1}{3}$, $g(1) = -\frac{3}{2}$(0.5pt)

Alors $g(\{-1, 0, 1\}) = \{\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\}$(01pt)

On a:

$$g(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x+2 = x-3 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3},$$

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-3} = 2 \Leftrightarrow 2x+1 = 2x-6 \Leftrightarrow 1 = -6, \text{ donc on n'a pas de solutions(0.5pt)}$$

d'où $g^{-1}(\{\frac{1}{2}, 2\}) = \{-\frac{5}{3}\}$(01pt)

2)

2.1) Soient $x, x' \in \mathbb{R} - \{3\}$, on a:

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\implies \frac{2x+1}{x-3} = \frac{2x'+1}{x'-3} \\ &\implies 2xx' - 6x + x' - 3 = 2x'x + x - 6x' - 3 \implies x = x'. \end{aligned}$$

Alors g est injective.(1.5pt)

2.2) Il suffit de prendre $y = 2$, soit $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, on a, d'après question 1, l'équation $g(x) = 2$ n'a pas de solutions $x \in \mathbb{R}$, c-à-d: $g(x) \neq 2$,

alors g n'est pas surjective.(1.5pt)

2.3) g n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.(0.5pt)

3) Soit $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = g(x)$.

3.1) f est injective, car g est injective d'après question 1.(1.5pt)

3.2) Soit $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, cherchons $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ vérifiant $y = f(x)$, on a:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = g(x) \iff y = \frac{2x+1}{x-3}, \\ &\iff yx - 3y = 2x + 1 \iff x = \frac{3y+1}{y-2}, \text{ pour } y \neq 2. \end{aligned}$$

Supposons $\frac{3y+1}{y-2} = 3$, c-à-d $3y+1 = 3y-6$, ce qui est impossible, donc $\frac{3y+1}{y-2} \neq 3$.

Il suffit de prendre $x = \frac{3y+1}{y-2} \in \mathbb{R} - \{3\}$, pour avoir $y = f(x)$.

Alors f est surjective.(1.5pt)

3.3) f est injective et surjective, alors f est bijective.(0.5pt)

Exercice 02:(10pts)

Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{Z}^2 par :

$$\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2 : (a, b) \mathcal{R} (a', b') \iff (a \leq a' \text{ et } a + b = a' + b')$$

1)

1.1) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

On a: $(a \leq a \text{ et } a + b = a + b)$, c.à.d: $(a, b) \mathcal{R} (a, b)$(1pt)

Alors \mathcal{R} est reflexive.(0.5pt)

2.2) Soient $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2$

On a: $(a, b) \mathcal{R} (a', b') \wedge (a', b') \mathcal{R} (a, b) \Rightarrow \begin{cases} (a \leq a' \text{ et } a + b = a' + b') \\ (a' \leq a \text{ et } a' + b' = a + b) \end{cases}$
 $\Rightarrow a = a' \text{ et } b = b'$
 $\Rightarrow (a, b) = (a', b')$(2pts)

Alors \mathcal{R} est antisymétrique(0.5pt)

1.3) Soient $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in \mathbb{Z}^2$

On a $[(a, b) \mathcal{R} (a', b') \wedge (a', b') \mathcal{R} (a'', b'')] \Rightarrow \begin{cases} (a \leq a' \text{ et } a + b = a' + b') \\ (a' \leq a'' \text{ et } a' + b' = a'' + b'') \end{cases}$
 $\Rightarrow (a \leq a'' \text{ et } a + b = a'' + b'')$
 $\Rightarrow (a, b) \mathcal{R} (a'', b'')$(2pts)

Alors \mathcal{R} est transitive.(0.5pt)

Puisque \mathcal{R} est reflexive, antisymétrique et transitive sur $\in \mathbb{Z}^2$, alors \mathcal{R} est une relation d'ordre sur $\in \mathbb{Z}^2$(0.5pt)

2) On a: $3 \not\leq 1$, alors $(3, 0) \not\mathcal{R} (1, 1)$, c.à.d: $(3, 0) \mathcal{R} (1, 1)$ est fausse.

$1 + 1 \neq 3 + 0$, alors $(1, 1) \not\mathcal{R} (3, 0)$, c.à.d: $(1, 1) \mathcal{R} (3, 0)$ est fausse.

Donc $((3, 0) \mathcal{R} (1, 1) \vee (1, 1) \mathcal{R} (3, 0))$ est fausse.(1.5pt)

3) Puisque $((3, 0) \not\mathcal{R} (1, 1) \wedge (1, 1) \not\mathcal{R} (3, 0))$ est vraie

Alors \mathcal{R} n'est pas un ordre total, c.à.d: l'ordre est partiel.(1.5pt)