Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

Département d'Informatique.

Module:Algèbre 1 (S_1-1^{re} Année LMD, MI) **Durée: $01^h:30^m$**

Examen Final (2019 − 2020)

Exercice 01:(05pts)

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$, montrer par disjonction de cas que $k\,(k-1)$ est pair.
2) Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer par contraposée que:
 ($n^2 - 4n + 3$ n'est pas divisible par 8) $\Longrightarrow$ (n est pair).

Exercice 02:(08pts)

Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n + 1 \text{ et } g(n) = \begin{cases} n-1, \text{ si } n \geq 1 \\ 0, \quad \text{si } n = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer $g(\{0,1,2\})$ et $f^{-1}(\{0,1,2\})$.
2) f et g sont-elles injectives? Sont-elles surjectives?
3) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Sont-elles bijectives?

Exercice 03:(07pts)

Soit $\mathcal{R}$ la reltion définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x, y \in \mathbb{R} :\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow 2y - 2x \in \mathbb{Z}$

1) Etudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$.
2) Est-ce-que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ? (justifier).
3) Est-ce-que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre ? (justifier).

Bon courage.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 1 (S_1−1^{re} Année LMD, MI) **Durée: 01^h:30^m**

***Corrigé de l'Examen Final* (2019 − 2020)**

Exercice 01:(05pts)

1) <u>1er cas: Si k est pair:</u> C-à-d $k = 2k'$, avec $k' \in \mathbb{Z}$.
On a: $k(k-1) = 2k'(2k'-1)$ qui est pair.
<u>2eme cas: Si k est impair:</u> C-à-d $k = 2k'+1$, avec $k' \in \mathbb{Z}$.
On a: $k(k-1) = (2k'+1)(2k'+1-1) = 2(2k'+1)k'$ qui est pair.
Alors $k(k-1)$ est pair. ....(2pts)
2) Pour montrer par contraposée que: ($n^2 - 4n + 3$ n'est pas divisible par 8) $\Longrightarrow$ (n est pair) ,
Il faut montrer que (n est impair) $\Longrightarrow$ ($n^2 - 4n + 3$ est divisible par 8). ....(1pt)
En effet:

$$\begin{aligned}(n \text{ est impair}) &\Longrightarrow n = 2k+1, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\\ &\Longrightarrow n^2 - 4n + 3 = 4k(k-1), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\\ &\Longrightarrow n^2 - 4n + 3 = 8k'', \text{ avec } k'' \in \mathbb{Z} \text{ (car } k(k-1) \text{ est pair d'apès Q1)}\\ &\Longrightarrow n^2 - 4n + 3 \text{ est divisible par 8..................(2pts)}\end{aligned}$$

Exercice 02:(08pts)

1) $g(\{0,1,2\}) = \{0,1\}$ et $f^{-1}(\{0,1,2\}) = \{0,1\}$...........(1pt)
2)
2.1) Soient $n, n' \in \mathbb{N}$, on a:
$f(n) = f(n') \Longrightarrow n+1 = n'+1 \Longrightarrow n = n'$.
Alors f est injective..................(1pt)
2.2) Il suffit de prendre $m = 0$, soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $n+1 \neq 0$, c-à-d: $f(n) \neq m$,
alors f n'est pas surjective..................(1pt)
2.3) Il suffit de prendre $n = 0 \in \mathbb{N}$, $n' = 1 \in \mathbb{N}$,
on a: $g(0) = 0 = g(1)$, mais: $0 \neq 1$,
alors g n'est pas injective..................(1pt)
2.4) Soit $m \in \mathbb{N}$, Il suffit de prendre $n = m+1 \in \mathbb{N}$, on a:
$g(n) = g(m+1) = (m+1) - 1 = m$.
Alors g est surjective..................(1pt)
3) $f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,
et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$f \circ g\,(n) = f\,(g\,(n)) = \begin{cases} f\,(n-1)\,, & \text{si } n \geq 1 \\ f\,(0)\,, & \text{si } n = 0 \end{cases} = \begin{cases} n, \text{ si } n \geq 1 \\ 1, \quad \text{si } n = 0 \end{cases}$ ....(0.5pt)

$g \circ f(n) = g\,(f\,(n)) = g\,(n+1) = n = Id\,(n)$..................(0.5pt)

3.1) $g \circ f = Id$, donc elle est bijective...................(1pt)

3.2) Il suffit de prendre $n = 0$ et $n' = 1$ on a:

$f \circ g\,(0) = 1 = f \circ g\,(1)$, mais $0 \neq 1$

Alors $f \circ g$ n'est pas injective et suite $f \circ g$ n'est pas bijective ....(1pt)

Exercice 03:(07pts)

1) Etudions la relation $\mathcal{R}$.

1.1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a:

$2x - 2x = 0 \in \mathbb{Z}$, c-à-d $x\mathcal{R}x$.

Alors $\mathcal{R}$ est reflexive..................(1.5pt)

1.2) Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longrightarrow (2y - 2x) \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow -(2y - 2x) \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow (2x - 2y) \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est symétrique...................(1.5pts)

1.3) Il suffit de prendre $x = 2$ et $y = 1$,

On a: $(2\,(1) - 2\,(2)) = -2 \in \mathbb{Z}$, c-à-d $2\mathcal{R}1$

et $(2\,(2) - 2\,(1)) = 2 \in \mathbb{Z}$, c-à-d $1\mathcal{R}2$, mais $2 \neq 1$

Alors $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique...................(1.5pt)

1.4) Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\ ) &\Longrightarrow (2y - 2x \in \mathbb{Z} \text{ et } 2z - 2y \in \mathbb{Z}) \\ &\Longrightarrow ((2y - 2x) + (2z - 2y) \in \mathbb{Z}) \\ &\Longrightarrow (2z - 2x \in \mathbb{Z}) \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est transitive...................(1.5pt)

2) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence car elle est reflexive, symetrique et transitive....................(0.5pt)

3) $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique....................(0.5pt)