Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

Département d'Informatique.

Module:Algèbre 1 (S_1-1^{re} Année LMD, MI) **Durée: 01**^{h}:30^m

***Examen Final* (2018 − 2019)**

Exercice 01:(05pts)

1) Montrer, par l'absurde, que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est un nombre irrationnel.

2) Soient $k, k' \in \mathbb{Z}^*$. Montrer par contraposée que: $(k.k' = 1) \Longrightarrow (|k| = |k'| = 1)$.

Exercice 02:(09pts)

Soient $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ les applications définies par :

$\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = 2n + 1$ et $h(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

1) Déterminer $f^{-1}(\{-1, 0, 1\})$ et $h(\{-1, 0, 1\})$.

2) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et h.

3) Préciser l'application $h \circ f$ puis étudier sa bijectivité.

Exercice 03:(06pts)

Soit $\mathcal{S}$ la relation définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ :\ x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow \frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{y^2}{y^2+1}$

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

2) L'ordre est-il total ? (justifier).

Bon courage.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

Département d'Informatique.

Module:Algèbre 1 ($\mathbf{S_1}-\mathbf{1}^{re}$ Année LMD, MI) **Durée: $\mathbf{01}^h$:30^m**

***Corrigé de l'examen Final* (2018 − 2019)**

Exercice 01:(05pts)

1) Supposons que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \in \mathbb{Q}$, c-à-d $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}^*$,
d'où $\ln(3^q) = \ln(2^p)$, donc $3^q = 2^p$, qui est impossible, car 3^q est impair et 2^p est pair.
Par suite $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel..................(02pts)

2) Soient $k, k' \in \mathbb{Z}^*$.
Pour montrer que: $(k.k' = 1) \Longrightarrow (|k| = |k'| = 1)$ par contraposée, il faut
montrer que $((|k| \neq 1) \vee (|k'| \neq 1)) \Longrightarrow (k.k' \neq 1)$,.................(01pt)
On a

$$\begin{aligned}((|k| \neq 1) \vee (|k'| \neq 1)) &\Longrightarrow ((|k| > 1) \vee (|k'| > 1)) \\ &\Longrightarrow ((|k||k'| > |k'|) \vee (|k'||k| > |k|)) \\ &\Longrightarrow ((|kk'| > |k'| \geqslant 1) \vee (|kk'| > |k| \geqslant 1)), \text{ car } k, k' \in \mathbb{Z}^* \\ &\Longrightarrow |kk'| > 1 \\ &\Longrightarrow k.k' \neq 1 \text{.................(02pts)}\end{aligned}$$

Exercice 02:(09pts)

1) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\}) = \{-1, 0\}$ et $h(\{-1, 0, 1\}) = \{0, 1\}$..................(1.5pts)
2)
2.1) Soient $n, n' \in \mathbb{Z}$, on a:
$f(n) = f(n') \Longrightarrow 2n + 1 = 2n' + 1 \Longrightarrow n = n'$.
Alors f est injective..................(01pt)
2.2) Il suffit de prendre $m = 0$, soit $n \in \mathbb{Z}$, on a: $2n + 1 \neq 0$, c-à-d: $f(n) \neq m$,
alors f n'est pas surjective..................(01pt)
Par suite f n'est pas bijective ....(0.5pt)
2.3) Il suffit de prendre $n = -1 \in \mathbb{Z}$, $n' = 0 \in \mathbb{Z}$, on a: $h(-1) = 0 = h(0)$,
mais: $-1 \neq 0$,
alors h n'est pas injective..................(01pt)
2.4) Soit $m \in \mathbb{Z}$, Il suffit de prendre $n = 2m$, on a:
$h(n) = h(2m) = \frac{2m}{2} = m$.
Alors h est surjective..................(01pt)
Par suite h n'est pas bijective ....(0.5pt)
3) $h \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a:

$h \circ f\,(n) = h\,(f\,(n)) = h\,(2n+1) = \frac{(2n+1)+1}{2} = n+1$..................(0.5pt)
3.1) Soient $n, n' \in \mathbb{Z}$, on a:
$h \circ f(n) = h \circ f(n') \implies n+1 = n'+1 \implies n = n'$.
Alors $h \circ f$ est injective..................(01pt)
3.2) Soit $m \in \mathbb{Z}$, Il suffit de prendre $n = m-1$, on a:
$h \circ f\,(m-1) = h\,(2m-1) = \frac{(2m-1)+1}{2} = m$.
Alors $h \circ f$ est surjective..................(01pt)
Par suite $h \circ f$ est bijective ....(0.5pt)

Exercice 03:(06pts)

1) Etudions la relation $\mathcal{S}$.
1.1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a:
$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$, c-à-d $x\mathcal{S}x$.
Alors $\mathcal{S}$ est reflexive..................(01pt)
1.2) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a:

$$\begin{aligned}(x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x\ ) &\implies \left(\tfrac{x^2}{x^2+1} \leq \tfrac{y^2}{y^2+1} \text{ et } \tfrac{y^2}{y^2+1} \leq \tfrac{x^2}{x^2+1}\right)\\ &\implies \tfrac{x^2}{x^2+1} = \tfrac{y^2}{y^2+1}\\ &\implies x^2y^2 + x^2 = y^2x^2 + y^2\\ &\implies x^2 = y^2\\ &\implies x = y, \text{ car } x, y \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{S}$ est antisymétrique..................(2pts)
1.3) Soit $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, on a:

$$\begin{aligned}(x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z\ ) &\implies \left(\tfrac{x^2}{x^2+1} \leq \tfrac{y^2}{y^2+1} \text{ et } \tfrac{y^2}{y^2+1} \leq \tfrac{z^2}{z^2+1}\right)\\ &\implies \left(\tfrac{x^2}{x^2+1} \leq \tfrac{z^2}{z^2+1}\right)\\ &\implies x\mathcal{S}z\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{S}$ est transitive..................(01pt)
Par suite $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre..................(01pt)
2) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a: $\frac{x^2}{x^2+1}, \frac{y^2}{y^2+1} \in \mathbb{R}_+$, donc $\left(\frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{y^2}{y^2+1} \text{ ou } \frac{y^2}{y^2+1} \leq \frac{x^2}{x^2+1}\right)$,
c-à-d: ($x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$).
Par suite $\mathcal{S}$ est un ordre total..................(01pt)