Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

Département d'Informatique.

Module:Algèbre 1 (S_1−$1^{ère}$ Année LMD, MI) **Durée: 01^h:30^m**

***Examen Final* (2017 − 2018)**

Exercice 01:(04pts)

1) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$. Montrer par contraposée que $x \neq y \Longrightarrow \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$.

2) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par l'absurde que $x.y \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.

Exercice 02:(08pts)

1) Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

2) Soient $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{|x|} \end{array}$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que: $\forall x \in \mathbb{R}_- : (g \circ f)(x) = x^2$.

2.1) Vérifier que f est surjective et que $g \circ f$ est injective.

2.2) Que peut-on dire de g?

Exercice 03:(08pts)

Soit $\mathcal{S}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$.

1) Etudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de $\mathcal{S}$.

2) Est-ce-que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence? (justifier).

3) Est-ce-que $\mathcal{S}$ est une relation d'order? (justifier).

4) Soit $P : \forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R} : \ x\mathcal{S}y$

Ecrir la négation de P, puis dire si est-elle vraie ou fausse.

Bon courage.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 1 (S_1−$1^{ère}$ Année LMD, MI) **Durée: 01^h:30^m**

Corrigé de l'examen Final (2017 − 2018)

Exercice 01:(04pts)

1) Pour montrer par contraposée que $x \neq y \Longrightarrow \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$, il faut montrer que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Longrightarrow x = y$. En effet:

On a $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Longrightarrow x + x^2 = y + y^2$
$\Longrightarrow (x-y)(x+y+1) = 0$
$\Longrightarrow (x-y) = 0$, car $x + y \geq 0$
$\Longrightarrow x = y$

2) Supposons que $x.y > \frac{x^2+y^2}{2}$, donc $0 > x^2+y^2-2x.y$, c'est à dire $0 > (x-y)^2$, ce qui est absurde car $(x-y)^2$ est positif.

Exercice 02:(08pts)

1) Supposons que $g \circ f$ est injective et f est surjective et montrons que g est injective.
Soit $y, y' \in F$, on a:
Puisque f est surjective $\exists x, x' \in E : y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
On a: $g(y) = g(y') \Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$
$\Longrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$
$\Longrightarrow x = x'$ car $g \circ f$ est injective.
$\Longrightarrow f(x) = f(x')$ car f est une application.
$\Longrightarrow y = y'$
Alors g est injective.
2) Vérifions la surjectivité de f et l'injectivité de $g \circ f$.
2.1) Soit $y \in \mathbb{R}_+$, cherchons $x \in \mathbb{R}_-$ tel que: $y = f(x)$.
$y = f(x) \iff y = \sqrt{|x|}$
$\iff y^2 = |x|$
$\iff x = y^2$ ou $x = -y^2$.
Il suffit de prendre $x = -y^2 \in \mathbb{R}_-$ pour avoir $y = f(x)$.
Alors f est surjective.

On a $g \circ f : \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(g \circ f)(x) = x^2$.
Soit $x, x' \in \mathbb{R}_-$, on a:

$$\begin{aligned} g\circ f\,(x)=g\circ f\,(x') &\Longrightarrow x^2=x'^2\\ &\Longrightarrow x=x' \text{ car } x,x' \text{ sont de même signe.}\end{aligned}$$

Alors $g\circ f$ est injective.

2.2) On a $g\circ f$ est injective et f est surjective, alors, d'après la 1^{re} question, g est injective.

Exercice 03:(08pts)

1) Etudions la relation $\mathcal{S}$.
1.1) Soit $x\in\mathbb{R}$, on a:
$x-x=0\in\mathbb{N}$, c-à-d $x\mathcal{S}x$.
Alors $\mathcal{S}$ est reflexive.
1.2) Il suffit de prendre $x=5$ et $y=3$, on a:
$5-3\in\mathbb{N}$, c-à-d $5\mathcal{S}3$,
mais $3-5\notin\mathbb{N}$, c-à-d $3\not\mathcal{S}5$.
Alors $\mathcal{S}$ n'est pas symétrique.
1.3) Soit $x,y\in\mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} (x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x\ ) &\Longrightarrow (x-y\in\mathbb{N} \text{ et } y-x\in\mathbb{N})\\ &\Longrightarrow x-y=0\\ &\Longrightarrow x=y\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{S}$ est antisymétrique.
1.4) Soit $x,y,z\in\mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} (x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z\ ) &\Longrightarrow (x-y\in\mathbb{N} \text{ et } y-z\in\mathbb{N})\\ &\Longrightarrow x-y+y-z\in\mathbb{N}\\ &\Longrightarrow x-z\in\mathbb{N}\\ &\Longrightarrow x\mathcal{S}z\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{S}$ est transitive.
2) $\mathcal{S}$ n'est pas une relation d'équivalence, car elle n'est pas symétrique.
3) $\mathcal{S}$ est une relation d'order, car elle est reflexive, antisymétrique et transitive.
4) $P:\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R}:\ x\mathcal{S}y$
Donc $\overline{P}:\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}:\ x\not\mathcal{S}y$.
C-à-d: $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}:\ x-y\in\mathbb{N}$.
P est vraie, car pour chaque $x\in\mathbb{R}$, il suffit de prendre $y=x\in\mathbb{R}$ pour avoir $x\mathcal{S}y$.