TD opérations sur les ensembles

Exercice 1 :

Montrer que :

1. $(A \subset B \; et \; B \subset C) \Longrightarrow (A \subset C)$

Solution :

L'hypothèse ici est $A \subset B \; et \; B \subset C$, c'est ce que l'on suppose vrai, et on doit prouver que $A \subset C$.
Soit $\underline{x \in A}$, or $A \subset B$ donc $x \in B$ et comme $B \subset C$ $\underline{\text{donc } x \in C}$ aussi ; donc $A \subset C$.

Exercice 2 :

1. Décrire l'ensemble des parties des ensembles suivants et déterminer le cardinal de chacun d'eux :
   $\emptyset$, $A = \{a\}, B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$ $D = \{a, b, c, d\}$
2. En déduire que si $card(E) = n$ alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Solution :

1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
   $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
   $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
   $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$
   $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$

   On a :

   $Card\ (\emptyset) = 1$; $card(A) = 2$; $card(B) = 4$; $card(C) = 8$; $card(D) = 16$

   Remarquons que $1 = 2^0$; $2 = 2^1$; $4 = 2^2$; $8 = 2^3$; $16 = 2^4$

2. On va faire un raisonnement par recurrence:
   Posons pour cela $p(n)$:($card(E) = n) \Longrightarrow (card(\mathcal{P}(E)) = 2^n)$
   On a p(0) : ($card(E) = 0) \Longrightarrow (card(\mathcal{P}(E)) = 2^0)$, or si $card(E) = 0$ alors $E = \emptyset$ et on a vu que $Card\ (\emptyset) = 1 = 2^0$; donc p(0) est vraie
   Supposons que $p(n)$ soit vraie c'est-à-dire ($card(E) = n) \Longrightarrow (card(\mathcal{P}(E)) = 2^n)$
   Montrons que $p(n + 1)$ est vraie aussi, c'est-à-dire
   $$(card(E) = n + 1) \Longrightarrow (card(\mathcal{P}(E)) = 2^{n+1})$$
   Si $card(E) = n + 1$, on peut choisir un élément x appartenant E, et on a $E = F \cup \{x\}$,avec $card(F) = n$, donc $card(\mathcal{P}(F)) = 2^n$
   On procède ainsi pour faire apparaitre un ensemble de cardinal égal à n pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence.
   Dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, il y a les parties de E qui ne contiennent pas x, et celles qui contiennent x, celles qui ne contiennent pas x sont toutes les parties de F, leur nombre est égale à $card(\mathcal{P}(F)) = 2^n$
   Les parties qui contiennent x peuvent etre former en ajoutant à chaque partie de F l'élément x, donc dans il y a 2^n parties de E contenant x, donc a total il y a $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, donc $card(\mathcal{P}(E)) = 2^{n+1}$.

Exercice 3 :

1. Montrer que pour touts ensembles A et B on a : $A \subset A \cup B$
2. Montrer que pour touts ensembles A et B on a : $A \cap B \subset A$

Solution :

1. Soit $\underline{x \in A}$, la propositon $x \in A$ ou $x \in B$ est vraie car dans cette disjonction il y a une proposition vraie, celle de l'hypothèse $x \in A$, donc $x \in A \cup B$, donc $A \subset A \cup B$.
2. Soit $\underline{x \in A \cap B}$, donc $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A$, donc $A \cap B \subset A$

Exercice 4 :

Montrer que pour tous ensembles A, B, C on a :

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Solution :

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)] \overset{def}{\Leftrightarrow} [x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)]$

On peut donc utiliser une table de vérité :

Pour chaque ensemble figurant dans l'égalité in faut une colonne, et le nombre de ligne est égale aux nombres de possibiliés qui est égales à 8

On a :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cap C$	$x \in B \cup C$	$x \in A \cap (B \cup C)$	$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

On remarque que les lignes de même niveau des deux dernières colonnes ont les mêmes valeurs de vérités, donc on a bien $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, c'est-à-dire $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice5 :

A, B, C sont des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A - B = A \cap \bar{B}^E$
2. $A \cap \bar{A}^E = \emptyset$
3. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
4. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

Solution :

1. Rappelons que pour montrer que deux X et Y ensembles sont égaux, on peut le faire au moins de deux façons, soit on montre que pour tout x on a $x \in X \Leftrightarrow x \in Y$, soit on montre que $X \subset Y$ et $Y \subset X$.

   Dans notre cas on va montrer l'égalité en utilisant l'équivalence :

   $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in \bar{B}^E \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B}^E$

2. Ici on va utiliser un raisonnement par l'absurde pour montrer l'égalité :
Supposons qu'il existe un $x \in A \cap \bar{A}^E$, on a :
$x \in A \cap \bar{A}^E \Leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin A)$, or la proposition $x \in A$ et $x \notin A$ est fausse, il en est de même donc pour la proposition $x \in A \cap \bar{A}^E$, donc $x \notin A \cap \bar{A}^E$, donc pour tout x dans E $x \notin A \cap \bar{A}^E$, donc $A \cap \bar{A}^E = \emptyset$

3. $$(A \cup B) - (A \cap B) \overset{1.}{=} (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \overset{Morgan}{=} (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$
$$= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B})$$
$$= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \text{ car } A \cap \bar{A} = B \cap \bar{B} = \emptyset$$
$$\overset{1.}{=} (A - B) \cup (B - A) = A \vartriangle B$$

4. $$A - (B \cup C) \overset{1.}{=} A \cap \overline{(B \cup C)} \overset{morgan}{=} A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) \overset{1.}{=} (A - B) \cap (B - A)$$