

Td sur les fonctions

Exercice 1

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + bx + c$ où b, c sont des réels quelconques non nuls

1. Mettre $f(x)$ sous sa forme canonique.
2. En déduire que f n'est pas surjective.
3. Montrer que le graphe de la fonction admet un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2}$
4. En déduire que f n'est pas injective.
5. Montrer que si $g: \mathbb{R} \rightarrow \left[c - \frac{b^2}{4}; +\infty \right], g(x) = f(x)$, alors g est surjective.
6. Montrer que si $h: \left[-\frac{b}{2}; +\infty \right[\rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x)$, alors h est injective.
7. En déduire que la fonction $\varphi: \left[-\frac{b}{2}; +\infty \right[\rightarrow \left[c - \frac{b^2}{4}; +\infty \right[, \varphi(x) = f(x)$ est une bijection et trouver φ^{-1}

Solution

1. $f(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$
2. Pour tout x dans \mathbb{R} $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$ donc $\underbrace{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}}_{f(x)} \geq c - \frac{b^2}{4} > c - \frac{b^2}{4} - 1$
Donc pour tout x dans \mathbb{R} $f(x) \neq c - \frac{b^2}{4} - 1$ donc f n'est pas surjective.
3. Soit y dans \mathbb{R} tel que $\frac{x+y}{2} = -\frac{b}{2}$, donc $x + y = -b$ et donc $y = -b - x$ et on a :
 $f(-b - x) = \left(-b - x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \left(-x - \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = f(x)$
Donc $f(-b - x) = f(x)$ et la droite $X = -\frac{b}{2}$ est bien un axe de symétrie verticale.
4. $f(-b - x) = f(x)$ et si on choisit $x = 0$, alors $-b - x = -b \neq 0$ et $f(-b) = f(0)$ donc f n'est pas injective.
5. Pour tout $y \geq c - \frac{b^2}{4}$ on a : $g(x) = y$ équivaut à $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = y - \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$ et comme $y \geq c - \frac{b^2}{4}$ alors l'équation $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = y - \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$ admet au moins une solution donc g est surjective.
6. Soit u, v dans $\left[-\frac{b}{2}; +\infty \right[$, on a :
 $h(u) = h(v)$ équivaut à $\left(u + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(v + \frac{b}{2}\right)^2$ et qui équivaut à son tour à $u = v$ ou $u = -v$ mais si $u = -v$ alors u sera dans l'intervalle $\left] -\infty; -\frac{b}{2} \right[$ ce qui est contraire à l'hypothèse donc il ne reste que la solution $u = v$ et h est donc injective.
7. Soit y dans $\left[c - \frac{b^2}{4}; +\infty \right[$, et considérons l'équation $y = \varphi(x)$ d'inconnue x dans $\left[-\frac{b}{2}; +\infty \right[$:
 $y = \varphi(x)$ équivaut à $x^2 + bx + c - y = 0$; calculons le discriminant Δ :
 $\Delta = b^2 - 4c + 4y$ comme $y \geq c - \frac{b^2}{4}$ donc $\Delta \geq 0$ donc l'équation admet au moins une solution donc l'application est **φ est surjective** ; calculons les deux solutions possibles :
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$ mais $x_1 \notin \left[-\frac{b}{2}; +\infty \right[$, donc l'équation n'admet qu'une seule solution, donc **φ est injective**. Finalement elle est bien bijective et on a :

$$\varphi^{-1}: \left[c - \frac{b^2}{4}; +\infty \right[\rightarrow \left[-\frac{b}{2}; +\infty \right[, \varphi^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c - x}}{2}$$

Exercice 2

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

1. Montrer que pour tous x dans \mathbf{R} on a : $-1 \leq g(x) < 1$
2. Montrer que g n'est ni injective ni surjective
3. Dresser le tableau des variations de cette application.
4. En déduire deux intervalles A, B de façon que l'application $f: A \rightarrow B, f(x) = g(x)$, soit une bijection, et déterminer son application réciproque f^{-1} .

Solution :

1. Pour tout x on a : $x^2 - 1 < x^2 + 1$ et comme $x^2 + 1 > 0$ alors $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1$, ceci d'une part ;
D'autre part,

$$-1 \leq g(x) \Leftrightarrow \left(-1 \leq \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \Leftrightarrow (-x^2 - 1 \leq x^2 - 1) \Leftrightarrow (-x^2 \leq x^2)$$

Comme cette dernière inégalité est vraie pour tout x alors $-1 \leq g(x)$ est vraie aussi pour tout x .

2. $g(1) = g(-1)$ et $1 \neq -1$ donc g n'est pas injective
Vu que $g(x) < 1$ donc pour tout x dans \mathbf{R} $g(x) \neq 2$ donc 2 n'a pas d'antécédent et g n'est pas surjective.
3. $D_g = \mathbf{R}$

$$g'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

Le dénominateur est tritement positif

Donc $g'(x) > 0$ lorsque $x > 0$; $g'(x) < 0$ lorsque $x < 0$; et $g'(x) = 0$ lorsque $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	+1	-1	+1

Si on choisit $A = [0; +\infty[$, alors la fonction f est strictement croissante sur A donc elle est injective.

Si on prend $B = [-1; 1[$, alors tout y dans B admet un antécédent, en effet :

$$[y = f(x)] \Leftrightarrow [y = g(x)] \Leftrightarrow \left[y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right] \Leftrightarrow [(y - 1)x^2 = -y - 1] \stackrel{y \neq 1}{\Leftrightarrow} \left[x^2 = \frac{1 + y}{1 - y} \right]$$

Et vu que $-1 \leq y < 1$ donc $0 \leq 1 + y < 2$ et $0 < 1 - y \leq 2$, donc $\frac{1+y}{1-y} \geq 0$ donc l'équation

$x^2 = \frac{1+y}{1-y}$ admet pour solution $x = \pm \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ et la fonction f devient surjective.

Ainsi la fonction $f: A \rightarrow B$ est une bijection et on a $f^{-1}: B \rightarrow A, f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 3

$$f: [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[, f(x) = \sqrt{x - 1}$$

Montrer que cette application est une bijection et déterminer f^{-1}

Solution

Pour tout y dans $[0; +\infty[$ on a :

$$[y = f(x)] \Leftrightarrow (y = \sqrt{x-1}) \Rightarrow (x-1 = y^2) \Rightarrow (x = 1 + y^2)$$

Donc l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution, donc f est bijective, elle admet donc une fonction réciproque $f^{-1}: [0; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[$, $f^{-1}(x) = 1 + x^2$

Exercice 4

1. Déterminer deux fonctions u, v de façon que $h = vou$ dans chacun des cas suivants :

a. $h_1(x) = \sqrt{x+3}$ b. $h_2(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ c. $h_3(x) = e^{x-1}$

2. Calculer $h_2 \circ h_1$ et $h_3 \circ h_2$

Solution :

a. Pour calculer $h_1(x)$ on calcule d'abord $x+3$ puis on prend la racine du résultat, on prend donc $u: R \rightarrow R, u(x) = x+3$ et $v: R \rightarrow R, v(x) = \sqrt{x}$ et on a :

$$(vou)(x) = v[u(x)] = v(x+3) = \sqrt{x+3} = h_1(x)$$

b. $u(x) = x^2, v(x) = \frac{x-1}{x+1}$ et on a :

$$(vou)(x) = v[u(x)] = v(x^2) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = h_2(x)$$

c. $u(x) = x-1, v(x) = e^x$ et on a :

$$(vou)(x) = v[u(x)] = v(x-1) = e^{x-1} = h_3(x)$$

Exercice 5

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ et $h: G \rightarrow H$ trois applications. Montrer que :

1. Si gof est injective alors f est injective
2. Si gof est surjective alors g est surjective
3. Si gof et hog sont bijectives alors f, g, h sont toutes bijectives.
4. Si gof est injective et f surjective alors g est injective
5. Si gof est surjective et g injective alors f est surjective

Solution

1. Si $f(a) = f(b)$ alors $g[f(a)] = g[f(b)]$ car g est une application, donc $(gof)(a) = (gof)(b)$ par définition, or gof est injective donc $a = b$. Donc f est injective
2. Soit z dans G , $gof: E \rightarrow G$ est surjective, donc il existe un x dans E tel que $(gof)(x) = z$, Donc $g[f(x)] = z$, mais $f(x) \in F$, et si on pose $f(x) = y$ alors $g(y) = z$ et donc g est surjective.
3. Si gof est bijective alors f est injective car gof est aussi injective, et g est surjective car gof est aussi surjective (d'après les questions précédentes), ceci d'une part ; D'autre part hog est bijective donc étant injective, alors g est injective, et étant surjective alors h est surjective.

On vient de montrer que g est surjective et injective donc g est bijective ; donc g^{-1} existe et est aussi bijective, et comme la composée de deux bijection est une bijection alors la composée $g^{-1} \circ (gof)$ est bijective mais $g^{-1} \circ (gof) = (g^{-1} \circ g) \circ f = Id_F \circ f = f$ donc f est une bijection.

Pour les mêmes raisons $(hog) \circ g^{-1} = ho(gog^{-1}) = hoId_G = h$ et $(hog) \circ g^{-1}$ est la composée de deux bijection, hog et g^{-1} , donc h est une bijection.

- Soient a, b dans F tels que $g(a) = g(b)$.
 a et b étant dans F et f est surjective, alors a et b possède des antécédents dans E , autrement dit il existe α, β dans E tels que $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$ et $g(a) = g(b)$ devient $g[f(\alpha)] = g[f(\beta)]$ c'est-à-dire $g \circ f(\alpha) = g \circ f(\beta)$ or $g \circ f$ est injective dnc $\alpha = \beta$ et donc $f(\alpha) = f(\beta)$ donc $a = b$ et ainsi g est injective.
- Soit y dans F , alors $g(y)$ est dans G , or $g \circ f$ est surjective donc il existe un x dans E tel que $g \circ f(x) = g(y)$ ou bien $g[f(x)] = g(y)$ et comme g est injective alors $f(x) = y$ donc y admet un antécédent x dans E donc f est surjective.

Exercice 6

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x, A =]-5; 3], B = [-2; 4]$$

- Dresser le tableau de variation de cette application
- Calculer $f(A), f^{-1}(B)$ (décomposer les intervalles et utiliser le théorème sur les images directes et réciproques)

Solution

- $f'(x) = 2x - 3$ donc $f'(x) > 0$ quand $x > \frac{3}{2}$; $f'(x) < 0$ quand $x < \frac{3}{2}$; $f'(x) = 0$ quand $x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$

- Calcul de $f(A)$:

$$f(A) = f\left(\left]-5; \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; 3\right]\right) = f\left(\left]-5; \frac{3}{2}\right]\right) \cup f\left(\left[\frac{3}{2}; 3\right]\right)$$

Dans l'intervalle $]-5; \frac{3}{2}]$ la fonction est continue strictement décroissante donc

$$f\left(\left]-5; \frac{3}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right); f(-5)\right] = [-2.25; 40]$$

$$\text{De même } f\left(\left[\frac{3}{2}; 3\right]\right) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right); f(3)\right] = [-2.25; 0]$$

$$\text{D'où } f(A) = [-2.25; 40] \cup [-2.25; 0] = [-2.25; 40]$$

Calcul de $f^{-1}(B)$:

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow (-2 \leq x^2 - 3x \leq 4) \Leftrightarrow (x^2 - 3x \geq -2 \text{ et } x^2 - 3x \leq 4)$$

$$- (x^2 - 3x \geq -2) \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2 \geq 0) \Leftrightarrow (x \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[)$$

$$- (x^2 - 3x \leq 4) \Leftrightarrow (x^2 - 3x - 4 \leq 0) \Leftrightarrow x \in [-1; 4]$$

$$\text{Donc } x \in f^{-1}(B) \text{ si et seulement si } x \in [-1; 1] \cup [2; 4] \text{ d'où } f^{-1}(B) = [-1; 1] \cup [2; 4].$$

Exercice 7

$$E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, E(x) = [x]$$

La partie entière $[x]$ de x est l'entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$

- Trouver $f(R)$
- Etudier les propriétés de E (injective ?...)

Solution :

- $y \in f(R)$ veut dire qu'il existe un réel x dans R tel que $y = [x]$, comme la partie entière est un entier relatif donc y doit être un entier relatif ; donc $f(R) \subset Z$.
Réciproquement si on y est un entier relatif alors $[y] = y$, donc y est dans $f(R)$ et ainsi $f(R) = Z$
- $0 \leq 0.5 < 1$ donc $[0.5] = 0$; $0 \leq 0.3 < 1$ donc $[0.3] = 0$; ceci suffit pour dire que la fonction partie entière n'est pas injective.
Pour la surjectivité, on a vu que pour tout x dans R , $0.1 \neq f(x)$, donc f n'est pas surjective.

Exercice 8

- $f: E \rightarrow F$ une application, B et B' sont deux sous-ensembles de F .
 - Montrer que $f^{-1}(\overline{B'^F}) = \overline{f^{-1}(B')^E}$
 - Montrer que $f^{-1}(B - B') = f^{-1}(B) - f^{-1}(B')$
- Donner un exemple de deux sous-ensemble I, J de F , avec $J \subset I$, et d'une application $f: R \rightarrow R$ tels que $f(I - J) \neq f(I) - f(J)$
- Soit A une partie de E .
 - Montrer que si f est injective alors $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Est-ce que la réciproque est vraie.
 - Montrer que si f est surjective alors $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. Etudier la réciproque.
 - En déduire que si f est bijective alors $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Solution

- $x \in f^{-1}(\overline{B'^F}) \Leftrightarrow f(x) \in \overline{B'^F} \Leftrightarrow f(x) \notin B' \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B') \Leftrightarrow x \in \overline{f^{-1}(B')^E}$
 - $x \in f^{-1}(B - B') \Leftrightarrow f(x) \in B - B' \Leftrightarrow (f(x) \in B \text{ et } f(x) \notin B')$
 $\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B) \text{ et } x \notin f^{-1}(B')]$
 $\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(B')]$

On peut le voir autrement en remarquant que $B - B' = B \cap \overline{B'^F}$ et en appliquant le théorème sur les image réciproque :

$$f^{-1}(B - B') = f^{-1}(B \cap \overline{B'^F}) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(\overline{B'^F}) \stackrel{1a.}{\cong} f^{-1}(B) \cap \overline{f^{-1}(B')^E} = f^{-1}(B) - f^{-1}(B')$$

- $I = [0; 2] \cup \{3\}$; $J = [0; 2]$; $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2$
 J est inclus dans I , $I - J = \{3\}$, $f(I) = [0; 4] = f(J)$, $f(I - J) = \{9\}$
 $f(I) - f(J) = \emptyset \neq \{9\} = f(I - J)$

On peut prendre un autre exemple :

$$f: R \rightarrow R, x \rightarrow \sin x,$$

$$I = [0; \pi] \quad J = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

$$J \subset I, \quad I - J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$f(I) = [0; 1] = f(J) \quad f(I - J) = [0; 1[\neq f(I) - f(J) = \emptyset$$

et un autre exemple :

$$f(x) = |x|, \quad I = [-2; 3] \quad J = [-2; 1]$$

$$J \subset I, \quad I - J =]1; 3] \quad f(I) = [0; 3] \quad f(J) = [0; 2]$$

$$f(I) - f(J) =]2; 3] \neq f(I - J) =]1; 3]$$

Exercice : trouver un exemple en utilisant la fonction partie entière

3. a. Soit y dans $f(\bar{A})$; il existe un x dans \bar{A} tel que $y = f(x)$. il faut montrer que y n'appartient pas à $f(A)$, pour cela supposons par l'absurde que y appartient à $f(A)$, alors il existe un x' dans A tel que $y = f(x')$, donc $f(x) = f(x')$ et comme la fonction est injective alors $x = x'$ donc x est aussi dans A or, x est dans \bar{A} , ce qui est impossible à avoir, donc l'hypothèse que y est dans A est fautive, donc y est dans $\overline{f(A)}$, donc $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Voyons si la réciproque est vraie :

Supposons pour cela que pour tout A dans E , $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ et essayons de voir si f est injective : soit x et x' dans E tel que $x \neq x'$

$x \neq x'$ implique $x' \in \overline{\{x\}}$ donc $f(x') \in f(\overline{\{x\}})$ or par hypothèse $f(\overline{\{x\}}) \subset \overline{f(\{x\})}$ donc $f(x') \in \overline{f(\{x\})}$ d'où $f(x') \notin f(\{x\})$ c'est-à-dire $f(x') \neq f(x)$;

on a prouvé que $x \neq x'$ implique $f(x') \neq f(x)$ et si on prend la contraposée on aura $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$ donc f est injective. On a donc une équivalence entre f est injective et $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout A dans E .

- b. Supposons que f est surjective et montrons que pour tout A dans E $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$:

Soit y dans $\overline{f(A)}$ alors $y \notin f(A)$, alors pour tout x dans A $y \neq f(x)$, or f est surjective, donc il existe un x' dans E tel que $y = f(x')$, mais comme x' ne peut être dans A alors x' est dans \bar{A} , et donc $f(x')$ est dans $f(\bar{A})$, or $f(x') = y$, donc $y \in f(\bar{A})$.

Réciproquement supposons que pour tout A dans E on ait $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$, et essayons de voir si f est surjective :

Supposons par l'absurde que f ne soit pas surjective, alors il existe un élément y dans F tel que pour tout x dans E $y \neq f(x)$, ceci veut dire que $y \in f(E)$, donc $y \in \overline{f(E)}$ or $\overline{f(E)} \subset f(\bar{E})$, donc $y \in f(\bar{E})$ or $\bar{E} = \emptyset$ et $f(\emptyset) = \emptyset$ donc $y \in \emptyset$ ce qui est impossible. Donc un tel élément y n'existe pas, donc tous les éléments de F possèdent des antécédents, ce qui veut dire que f est surjective.

Ainsi on a bien une équivalence entre la surjectivité et le fait que pour tout A dans E $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

Exercice 9

Soit f une application $X \rightarrow Y$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est injective
- pour chaque sous-ensemble A de X , $f^{-1}(f(A)) = A$
- pour chaque couple de sous-ensemble A, B de X , $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Solution

On montre que $a. \Rightarrow b. \Rightarrow c. \Rightarrow a.$

$a. \Rightarrow b.$:

Soit A inclus dans X et x dans $f^{-1}(f(A))$:

$$x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow [f(x) \in f(A)] \Leftrightarrow [\exists x' \in A : f(x') = f(x)] \xrightarrow[\text{injective}]{f} (x = x') \Rightarrow (x \in A)$$

Donc $f^{-1}(f(A))$ est inclus dans A

Réciproquement, soit x dans A , donc $f(x)$ est dans $f(A)$, donc par définition de l'image réciproque de $f(A)$, x est dans $f^{-1}(f(A))$. Donc sans qu'on ait besoin de l'injectivité $A \subset f^{-1}(f(A))$. Ainsi, $f^{-1}(f(A)) = A$.

$b. \Rightarrow c.$

On a vu au cours que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; reste à montrer que: $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$

Soit $a \in f(A) \cap f(B)$:

$$\begin{aligned} a \in f(A) \cap f(B) &\Leftrightarrow [a \in f(A) \text{ et } a \in f(B)] \Leftrightarrow [\exists x \in A: f(x) = a \text{ et } \exists x' \in B: f(x') = a] \\ &\Rightarrow (f(x) = f(x') = a) \Rightarrow [f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(\{x'\}))] \end{aligned}$$

Or par hypothèse pour tout ensemble A dans X $f^{-1}(f(A))$, donc si on prend $A=\{x\}$ alors $f^{-1}(f(\{x\})) = x$ et $f^{-1}(f(\{x'\})) = x'$ donc $x = x'$ donc $x \in A \cap B$ et donc $f(x) \in f(A \cap B)$, or $f(x) = a$ donc $a \in f(A \cap B)$. Donc $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

c. \Rightarrow a.

Soit x, x' deux éléments de X tels que $f(x) = f(x')$:

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow \{f(x)\} = \{f(x')\} \Rightarrow \{f(x)\} \cap \{f(x')\} \neq \emptyset \Rightarrow f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) \neq \emptyset$$

Or on sait par hypothèse (c.) que $f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = f(\{x\} \cap \{x'\})$ donc $f(\{x\} \cap \{x'\}) \neq \emptyset$, donc $\{x\} \cap \{x'\} \neq \emptyset$ donc $\{x\} = \{x'\}$ donc $x = x'$

On a :

$$[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \text{ donc } (a \Rightarrow c) \text{ or } (c \Rightarrow a) \text{ donc } (a \Leftrightarrow c)$$

$$[(b \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow a)] \text{ donc } (b \Rightarrow a) \text{ or } (a \Rightarrow b) \text{ donc } (a \Leftrightarrow b)$$

Donc les trois propositions sont bien équivalentes.

Exercice 10

Etudier l'injectivité et la surjectivité des fonctions suivantes

1. $f: N \times N \rightarrow N, f(x, y) = x + y$
2. $g: N \times N \rightarrow N, g(x, y) = xy$
3. $j: R \times R \rightarrow R^*, j(x, y) = xy$
4. $d: Z \times Z^* \rightarrow Q, d(x, y) = \frac{x}{y}$
5. $h: R \times R \rightarrow R, h(x, y) = xy + 1$
6. $i: R \times R \rightarrow R \times R, g(x, y) = (y, x)$
7. $h: Z \rightarrow N \times Z, h(x) = (|x|, x)$

Solution :

1. $f(1,2) = f(0,3) = 3$ et $(1,2) \neq (0,3)$ donc f n'est pas injective
Pour tous n dans N, on a $n = 0 + n = 0$ or $n = f(0, n)$ donc f est surjective
2. $g(2,3) = g(3,2) = 6$ et $(2,3) \neq (3,2)$ donc g n'est pas injective
Pour tout entier n on a $1 \times n = n$ or $1 \times n = g(1, n)$ donc $n = g(1, n)$ donc g est surjective
6. $i(x, y) = i(x', y') \Leftrightarrow (y, x) = (y', x') \Leftrightarrow [(y = y') \text{ et } (x = x')]$ donc $(x, y) = (x', y')$ et i est donc injective.
Pour tout couple (a, b) dans $R \times R$, on a $(a, b) = i(b, a)$ donc i est surjective.
7. $(1,1) = (|1|, 1) = (|-1|, 1)$ c'est-à-dire $h(-1) = h(1)$ et $-1 \neq 1$ donc h n'est pas injective.
Si on considère le couple $(1, -2)$ de $N \times Z$, alors pour tout x dans Z, $(|x|, x) \neq (1, -2)$, c'est-à-dire pour tout x dans Z $(1, -2) \neq h(x)$ donc h n'est pas surjective.

Exercice supplémentaires

1. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction. Déterminer si à partir des quatre propriétés suivantes on peut déduire que :

- f est injective
- f est surjective

- f est bijective
- on ne peut rien dire
 1. $\forall y \in F: f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$
 2. $\forall y \in F: f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément
 3. $\forall y \in f(E): f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$
 4. $\forall y \in f(E): f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément

2. Déterminer quelles sont parmi les fonctions suivantes de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ dans \mathbf{Z} celles qui sont injectives et celles qui sont surjectives

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a. $f(n, m) = 3n - m$ | c. $f(n, m) = n + m + 2$ |
| b. $f(n, m) = m^2 - n^2$ | d. $f(n, m) = m - n $ |

3. a. Montrer que toute fonction réelle d'une variable réelle strictement monotone est injective.
 b. Donner un exemple d'une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} qui soit croissante et non injective

4. Soit f une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} vérifiant $f(x) = x^2$. trouver les ensembles suivants :

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| a. $f^{-1}(\{0\})$ | c. $f^{-1}(\{x : x \geq 3\})$ |
| b. $f^{-1}(\{x : 0 < x < 1\})$ | d. $f^{-1}(\{-1\})$ |

5. $g(x) = [x]$. Déterminer les ensembles suivants :

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| a. $g^{-1}(\{1\})$ | c. $g^{-1}(\{x : 0 < x < 1\})$ |
| b. $g^{-1}(\{-1, 0, 2\})$ | d. $g^{-1}(\{x : 0 < x \leq 1\})$ |

6. Soit $f : A \rightarrow B$ une **application** ou A et B sont deux ensembles finis ayant même cardinal. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.