Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Corrigé de la fiche de TD 2 : Ensembles et Applications

Exercice 1 :
Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B, A \cup B, A \cap \overline{B}$ ainsi que $\overline{A} \cap B$.
1. $E = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}, B = \{2, 4\}$.
2. $E = \mathbb{R}, A =]-\infty; 2], B = [3; +\infty[$.
3. $E = \mathbb{R}, A = \mathbb{N}, B =]0; +\infty[$.

Solution Exercice 1
1. $A \cap B = \{2\}; A \cup B = \{1, 2, 4\}; A \cap \overline{B} = \{1\}; \overline{A} \cap B = \{4\}$.
2. $A \cap B = \emptyset; A \cup B =]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[; A \cap \overline{B} = A; \overline{A} \cap B = B$.
3. $A \cap B = \mathbb{N}^*; A \cup B = [0; +\infty[; A \cap \overline{B} = \{0\}; \overline{A} \cap B = \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.

Exercice 2 :
Soit A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A. Démontrer les propriétés suivantes :
a. $C_A(C_A(X)) = X$.
b. $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$ et $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$.
c. $X \subset Y \Leftrightarrow C_A(Y) \subset C_A(X)$.

Solution Exercice 2
a. Montrons que $C_A(C_A(X)) = X$.
i). Montrons que $C_A(C_A(X)) \subset X$. Soit $x \in C_A(C_A(X))$. Cela veut dire que $x \notin C_A(X)$, c'est à dire que $x \in X$. Donc $C_A(C_A(X)) \subset X$.
ii). Montrons que $X \subset C_A(C_A(X))$. Soit $x \in X$. Ceci implique que $x \notin C_A(X)$. Donc $x \in C_A(C_A(X))$. D'aprés i) et ii), on a montrer l'égalité.
b. Soit $x \in C_A(X \cup Y)$. Ceci entraine que $x \notin X \cup Y$. Celà veut dire que $x \notin X$ et $x \notin Y$. Donc $x \in C_A(X)$ et $x \in C_A(Y) \Rightarrow x \in C_A(X) \cap C_A(Y)$. L'implication dans le sens inverse ainsi que $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$ se démontre de la même manière.
c. Soit $x \in C_A(Y)$, ce qui implique que $x \notin Y$ et $x \notin X$ car $X \subset Y$ par hypothèse. Donc $x \in C_A(X)$. L'implication dans le sens inverse ce démontre de la même manière.

Exercice 3 :
Soient A et B deux ensembles.
1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Y a-t-il égalité ?

Solution Exercice 3
1. Montrons que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Soit $E \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow E \subset A \cap B \Leftrightarrow E \subset A$ et $E \subset B \Leftrightarrow E \in \mathcal{P}(A)$ et $E \in \mathcal{P}(B)$. $\Leftrightarrow E \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Montrons que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
Soit $E \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow E \in \mathcal{P}(A)$ ou $E \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow E \subset A$ ou $E \subset B$. Ceci implique que $E \subset A \cup B \Rightarrow E \in \mathcal{P}(A \cup B)$.
En générale, on a pas égalité dans 2). Il suffit de prendre $A = \{1, 3\}$ et $B = \{2\}$.

Exercice 4 :
Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et de B par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

a. Que valent $A\Delta A$ et $A\Delta\emptyset$?
b. Montrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
c. Montrer que $A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
d. Montrer que $(A\Delta B)\Delta B = A$.

Solution Exercice 4
a. $A\Delta A = \emptyset$ et $A\Delta\emptyset = A$.
b. Montrons que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Donc $x \in A\Delta B$ si et seulement si ou bien $x \in A$ ou bien $x \in B$ (le ou exclusif). Alors on a $A\Delta B = \{x \in A \text{ ou bien } x \in B\}$.

$$A\Delta B = \{(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \vee x \notin A)\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A)\}.$$

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}.$$

c. Montrons que $A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\}.$$

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B \text{ et } x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \vee x \in B) \text{ et } (x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B})\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \wedge x \in \overline{B}) \text{ ou } (x \in \overline{A} \wedge x \in B)\}.$$

$$A\Delta B = \{x \in A \cap \overline{B} \text{ ou } x \in \overline{A} \cap B\}.$$

$$A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

d. Montrons que $(A\Delta B)\Delta B = A$. Pour celà, calculons $(A\Delta B)\Delta C$.

$$(A\Delta B)\Delta C = [\overline{(A\Delta B)} \cap C] \cup [(A\Delta B) \cap \overline{C}].$$

$$(A\Delta B)\Delta C = [\overline{(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})} \cap C] \cup [((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) \cap \overline{C}].$$

$$(A\Delta B)\Delta C = [\overline{(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}} \cap C] \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

$$(A\Delta B)\Delta C = [((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)) \cap C] \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

$$(A\Delta B)\Delta C = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

Maintenant, si $C = B$, on obtient :

$$(A\Delta B)\Delta B = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap B) \cup (A \cap B \cap B) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{B}).$$

$$(A\Delta B)\Delta B = \emptyset \cup (A \cap B) \cup \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A.$$

Exercice 5 :
Soit f une application de E vers F. Soient A et A' des parties de E. Soient B et B' des parties de F. Montrer que :

$$\begin{array}{cc} 1) A \subset f^{-1}(f(A)) & 2) f(f^{-1}(B)) \subset B \\ 3) f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') & 4)\ f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A') \\ 5) f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') & 6) f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \end{array}$$

Montrer que si f est injective alors on a l'égalité dans 4).

Solution Exercice 5
1. Soit $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$ par définition de $f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
2. Soit $y = f(x) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x) \in B$.
3. "$\subset$" : Soit $y \in f(A \cup A') \Rightarrow \exists x \in A \cup A' : y = f(x) \Rightarrow \exists x \in A$ ou $\exists x \in A' : y = f(x)$.
$(\exists x \in A : y = f(x))$ ou $(\exists x \in A' : y = f(x)) \Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(A') \Rightarrow y \in f(A) \cup f(A')$.
"$\subset$" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse.
4. Soit $y \in f(A \cap A') \Rightarrow \exists x \in A \cap A' : y = f(x) \Rightarrow \exists x \in A : y = f(x)$ et $\exists x \in A' : y = f(x)$.
$\Rightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(A') \Rightarrow y \in f(A) \cap f(A')$.
5. "$\subset$" : Soit $x \in f^{-1}(B \cup B') \Rightarrow f(x) \in B \cup B' \Rightarrow f(x) \in B$ ou $f(x) \in B'$.
$\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$ ou $x \in f^{-1}(B') \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
"$\subset$" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse.
6. "$\subset$" : Soit $x \in f^{-1}(B \cap B') \Rightarrow f(x) \in B \cap B' \Rightarrow f(x) \in B$ et $f(x) \in B'$.
$\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$ et $x \in f^{-1}(B') \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
"$\subset$" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse.
Montrons que si f est injective alors on a égalité dans 4). En effet :
Soit $y \in f(A) \cap f(A') \Rightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(A') \Rightarrow (\exists x_1 \in A : y = f(x_1))$ et $(\exists x_2 \in A' : y = f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ car f est injective. Donc $\exists x = x_1 = x_2 \in A \cap A' : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A \cap A')$.

Exercice 6 :
Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?
1. f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(x) = 2x$.
2. g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $g(x) = 2x + 1$.
3. h de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $h(x) = |x| - [x]$.
4. u de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $u(x) = \sqrt{x}$.

Solution Exercice 6
1. f est injective et non surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédents dans $\mathbb{N}$.
2. g est injective et non surjective car les nombres pairs n'ont pas d'antécédents dans $\mathbb{N}$.
3. h est non injective car $h(5) = h(6)$ mais $5 \neq 6$, et non surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédents dans $\mathbb{Z}$.
4. u est injective et surjective donc bijective.

Exercice 7 :
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.
a. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
b. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Solution Exercice 7
a. Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective.
Soient $x_1, x_2 \in E$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$
$\Rightarrow x_1 = x_2$ car $g \circ f$ est injective.
b. Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective i.e

$$\forall z \in G, \exists y \in F : z = g(y).$$

$g \circ f$ est surjective i.e

$$\forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x).$$

Posons $y = f(x)$, alors $z = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(y)$. Donc g est surjerctive.

Exercice 8 :
Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.
1. Vérifier que pour tout réel a non nul on a $h(a) = h(\frac{1}{a})$. L'application h est-elle injective ?
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.
a. Montrer que f est injective.
b. Vérifier que : $\forall x \in I, f(x) \leqslant 2$.
c. Montrer que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouver f^{-1}.

Solution Exercice 8
1. Pour a non nul, on a $h(a) = \dfrac{4a}{a^2+1}$, et de même on trouve que $h(\frac{1}{a}) = \dfrac{4a}{a^2+1}$. Donc l'application h n'est pas injective car par exemple $h(2) = h(\frac{1}{2})$ mais $2 \neq \frac{1}{2}$.
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.
a. Montrons que f est injective : Soient $x_1, x_2 \in I$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{4x_1}{x_1^2+1} = \frac{4x_2}{x_2^2+1}.$$

Après un simple calcul on trouve :

$$(x_2 - x_1)[x_1x_2 - 1] = 0,$$

ce qui implique que $x_1 = x_2$ ou bien $x_1 = \dfrac{1}{x_2} \notin I \Rightarrow x_1 = x_2$.
b. Vérifions que : $\forall x \in I, f(x) \leqslant 2$. Il suffit de montrer que $f(x) - 2 \leqslant 0$. En effet :

$$f(x) - 2 = \frac{4x}{x^2+1} - 2 = \frac{4x - 2x^2 - 2}{x^2+1} = \frac{-2(x-1)^2}{x^2+1} \leqslant 0.$$

(Suite et fin Solution Exercice 8)
c. Montrons que f est une bijection de I sur $]0,2]$. Il suffit de résoudre l'équation $y=f(x)$, et de trouver un unique x en fonction de y.

$$y=\frac{4x}{x^2+1}\Rightarrow yx^2-4x+y=0.$$

$\Delta=4(4-y^2)\geqslant 0$ car $y\in]0,2]\Rightarrow x_1=\dfrac{2+\sqrt{4-y^2}}{y}, x_2=\dfrac{2-\sqrt{4-y^2}}{y}$.
On remarque que $x_1>0$ et $x_1.x_2=1$ ce qui implique que $x_2>0$. Cherchons lequel des deux n'appartient pas à I.
$x_1-1=\dfrac{2+\sqrt{4-y^2}}{y}-1=\dfrac{2-y+\sqrt{4-y^2}}{y}\geqslant 0\Rightarrow x_1\in I$.
Par l'absurde, on suppose que $x_2\in I$ et on aboutit à une contradiction qui va nous permettre de dire que $x_2\notin I$.
Conclusion : f est une bijection et f^{-1} définie de $]0,2]$ sur I :

$$x=f^{-1}(y)=\frac{2+\sqrt{4-y^2}}{y}.$$