

**Fiche de TD 3 : Relations binaires**

**Exercice 1 :**

Soit  $\mathcal{R}$ , la relation définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de  $x$  pour tout réel  $x$ .
3. Déterminer l'ensemble quotient.

**Exercice 2 :**

Soit  $E$  un ensemble et  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  une partition de  $E$ . On définit la relation binaire  $\mathcal{R}$  dans  $E$  en posant, pour tout couple  $(x, y) \in E^2$  :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } y \in X_i).$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences modulo  $\mathcal{R}$ .

**Exercice 3 :**

Soit dans  $\mathbb{R}^2$  la relation définie par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x \leq x' \text{ et } y \leq y').$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Préciser deux majorants, deux minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie  $A = \{(1, 2), (3, 1)\}$ .
3. La partie  $A$  possède t-elle un plus grand élément et un plus petit élément ?

**Exercice 4 :**

On définit dans  $\mathbb{Z}$  la relation  $\mathcal{S}$  par :

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a \leq b + 1.$$

1. Vérifier que  $0\mathcal{S}1$  et  $1\mathcal{S}0$ . Donner une conclusion.
2. Soit  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $\mathbb{Z}$  par :

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a < b + 1.$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre dans  $\mathbb{Z}$ .