Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Fiche de TD 4 : Structures Algèbriques

Exercice 1 :
Soit $(G, \star)$ un groupe qui admet e comme élément neutre.
I. Montrer que :

1. $\forall a \in G : a \star x = a \Leftrightarrow x = e.$
2. $\forall a \in G : x \star a = a \Leftrightarrow x = e.$

II. Trouver tout les éléments x de G qui satisfait la relation $x \star x = x$.

Exercice 2 :
On définit dans l'ensemble $\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, la loi $\bigstar$ comme suit :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\} : a \bigstar b = a + b + 2ab.$$

Montrer que $\left(\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, \bigstar\right)$ est un groupe abélien.

Exercice 3 :
Soit $(G, .)$ un groupe. On appelle le centre de G l'ensemble

$$C = \{c \in G / x.c = c.x, \forall x \in G\}.$$

Montrer que C est un sous-groupe de G.

Exercice 4 :
Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe surjectif.
Montrer que si $(G_1, .)$ est commutatif alors $(G_2, .)$ est commutatif.

Exercice 5 :
Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on définit les deux lois suivantes : $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \overline{x} \dot{+} \overline{y} = \overline{x \dot{+} y} \\ \overline{x} \dot{\times} \overline{y} = \overline{x \dot{\times} y} \end{cases}$$

1. Tracer les tableaux de $\dot{+}$ et $\dot{\times}$.
2. Montrer que $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ est un corps commutatif.