

Corrigé Série d'exercices N°1

Exercice (01)

1. $\forall a \in]0, +\infty[; \exists x \ x^2 + ax + 1 = 0.$

la négation: $\exists a \in]0, +\infty[; \forall x \ x^2 + ax + 1 \neq 0.$

2. $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e + 2ex = 4x + e.$

la négation: $\forall e \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, e + 2ex \neq 4x + e.$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

la négation: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$

4. $a \in \mathbb{R}$ est une solution de $x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < -2; \\ a > 3. \end{cases}$

la négation:

$a \in \mathbb{R}$ est une solution de $x^2 - x - 6 < 0$ et $\begin{cases} a > -2; \\ a < 3. \end{cases}$

5. $\forall x; x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{C}.$

la négation: $\forall x; x^2 + x + 1 \neq 0$ et $x \notin \mathbb{C}.$

6. $z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}.$

la négation: $z = \bar{z}$ et $z \notin \mathbb{R}.$

□

7. $\exists a \in]0, +\infty[; f(a) = g(a).$

la négation: $\forall a \in]0, +\infty[; f(a) \neq g(a).$

8. $\forall x \in \mathbb{R}_+; f(x) \neq 0.$

la négation: $\exists x \in \mathbb{R}_+; f(x) = 0.$

9. $\exists a, b \in \mathbb{R}; f(a) \neq f(b).$

la négation: $\forall a, b \in \mathbb{R} \ f(a) = f(b).$

10. $\exists x \in [-1, 4]; f(x) > g(x).$

la négation: $\forall x \in [-1, 4]; f(x) \leq g(x).$

11. $\forall y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R} \ f(x) > y.$

la négation: $\exists y \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) \leq y.$

12. $\forall x; -1 \leq f(x) \leq 1.$

la négation: $\exists x; f(x) \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
un exemple: la fonction: cosinus.

□

Exercice N°2):

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$; $y = 2x - 5$.
donc elle est vraie.

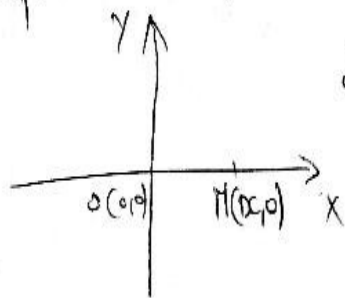
2. Soit $x \in \mathbb{R}$; $e(1+2x) = 4x+2$
 $= 2(1+2x)$

$\exists e = 2$ tel que $e(1+2x) = 4x+2$
donc elle est vraie.

3. La valeur absolu $|x|$ est la distance
entre x et 0



et on peut dire aussi la distance entre
le point $M(x,0)$ et $O(0,0)$ est $\sqrt{x^2+0} = \sqrt{x^2}$



donc $|x| = \sqrt{x^2}$.

Alors elle est vraie

4. Soit $n \in \mathbb{N}$
Si n est pair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$

$n^2 = 4k^2$ donc $4 \mid n^2$.

Si n est impair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2+k) + 1$ donc $n^2 - 1 = 4(k^2+k)$
alors $4 \mid n^2 - 1$.

Alors elle est vraie.

5. Soit $\varepsilon > 0$ est ce que il existe $\alpha > 0$
tel que $\forall x \mid 0 < x < \alpha \Rightarrow \mid x^2 \mid < \varepsilon$.

Soit x on cherche à trouver α tel que
 $\mid x \mid < \alpha \Rightarrow \mid x^2 \mid < \varepsilon$.

$\mid x \mid < \sqrt{\varepsilon}$. on choisit $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$.
alors elle est vraie.

Exercice (03):

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, on a $4xy - 6x - 6y + 12 \neq 3$

$$4. \alpha_1 = (20 + 14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$$

On suppose que α_1 est rationnel c.à.d. il existe
p et q $\in \mathbb{Z}^*$ tels que $\alpha_1 = \frac{p}{q}$

alors $20 + 14\sqrt{2} = \left(\frac{p}{q}\right)^3$ alors $\sqrt{2} = \frac{1}{14} \left(\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 20 \right)$

on conclue que $\sqrt{2}$ est rationnel contradiction
donc α_1 irrationnel.

la même chose pour α_2 .

$$5. \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$x^3 = (\alpha_1 + \alpha_2)^3 = \alpha_1^3 + 3\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3$$

$$= 20 + 14\sqrt{2} + 3[(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})]^{\frac{1}{3}} + 3[(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})]^{\frac{1}{3}} + 20 - 14\sqrt{2}$$

$$= 40 + 3[(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})]^{\frac{1}{3}}$$

$$+ 3[(20-14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 40 + 3(20^2 - (14\sqrt{2})^2)^{\frac{1}{3}} [(20+14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} +$$

$$(20-14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}]$$

$$= 40 + 24$$

6. par récurrence:

Soit $P(n): n^2 \leq 2^n \leq n!$; $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$

pour $n=4$

$$4^2 \leq 2^4 \leq 4!$$

$$16 \leq 2^4 \leq 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

$$16 \leq 16 \leq 24 \text{ (juste)}$$

donc $P(n)$ elle est vraie pour $n=4$.

On suppose que $P(k)$ est vraie pour $0 < k$
et on prouve que $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{On a } n^2 \leq 2^n \leq n!$$

$$2 \times n^2 \leq 2 \times 2^n \leq 2 \times n! \leq (n+1) \cdot n!$$

$$n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + n^2 \leq 2^{n+1} \leq (n+1)!$$

$$(n+1)^2 \leq 2^{n+1} \leq (n+1)!$$

Alors $P(n+1)$ est vraie.

On conclue que: $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\} P(n)$.

7. Soit $x > 1$ donc $0 < \frac{1}{x} < 1$.

Alors $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (car $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$
et $E\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Z}$).

□

8. On démontre n est impair \Rightarrow $(n^2 - 1)$ est divisible par 8

pour démontrer $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ il suffit de démontrer $q \Rightarrow p$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4(k^2 + k) \end{aligned}$$

On a deux cas :

* k est pair alors $\exists k' \in \mathbb{N}$ $k = 2k'$

$$n^2 - 1 = 4(4k'^2 + 2k') = 8(2k'^2 + k')$$

donc $8 \mid (n^2 - 1)$

* k est impair alors $\exists k' \in \mathbb{N}$ $k = 2k' + 1$

$$n^2 - 1 = 4(4k'^2 + 4k' + 1 + 2k' + 1) = 8(k'^2 + 3k' + 1)$$

donc $8 \mid (n^2 - 1)$. \square

Alors $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 $\Rightarrow n$ est pair
9. par récurrence :

$$\text{Soit } P(n) \sum_0^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{pour } n=0 \quad P(0) : \sum_0^0 k^2 = \frac{0}{6}$$

$0 = 0$ est vraie.

On suppose que $P(k)$ est vraie pour $0 \leq k \leq n$ est on prouve que $P(n+1)$ est vraie.

$$P(n+1) : \sum_0^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_0^{n+1} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$= \sum_0^n k^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

\square Alors $P(n+1)$ est vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, Soit $\varepsilon > 0$, $|a| < \varepsilon$.

et on suppose que $a \neq 0$ si on choisit

$\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$. on a $|a| < \frac{|a|}{2}$ contradiction
alors $a = 0$.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$, on a $4xy - 6x - 6y + 12 \neq 3$.

Soit $x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ et on suppose que

$$4xy - 6x - 6y + 12 = 3.$$

$$y(-6 + 4x) = 6x - 9.$$

on a $x \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ donc

$$y = \frac{6x - 9}{4x - 6} \quad (x \neq \frac{3}{2}).$$

$$y = \frac{3(2x - 3)}{2(2x - 3)} = \frac{3}{2} \text{ contradiction.}$$

$y \neq \frac{3}{2}$ alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\} \quad 4xy - 6x - 6y + 12 \neq 3.$$

[5]