

Série d'exercices N2

Exercice(01)

On considère 4 ensembles A, B, C et D , et des applications $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$.

Montrer que

$g \circ f$ injective $\implies f$ injective.

$g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective.

Montrer que :

$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \iff (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives})$.

Exercice(02)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective? surjective?

Exercice(03)

Soit $f : X \rightarrow Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalents :

1/ f est injective.

2/ Pour tout A, B de X , on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice(04)

Soit E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$. Soient également A et B deux parties de F .

1./ Démontrer que $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque est elle vraie?

2/ Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

3/ Démontrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice(05)

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x}$ est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice(06)

Soient f et g les applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définies par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ pair,} \\ 0 & \text{si } x \text{ impair.} \end{cases}$

Dérminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

f et g sont-elles injectives? surjectives?

Exercice(07)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1 f est injective.

2 $\forall A \in P(E) f^{-1}(f(A)) = A$

3 $\forall A_1, A_2 \in P(E) f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

4 $\forall A \in P(E) f(C_E A) \subset C_F f(A)$.

5 $\forall A_1, A_2 \in P(E) f^{-1}(A_1 \cup A_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$.

Exercice(08)

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui même définie par :

$f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2$.

Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}, A = \{1, 2\}, A = \{3\}$.

2. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}, A = [1, 2]$.

Exercice(09)

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F . Soient A et B deux parties de E , Montrer que :

1/ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2/ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Exercice(10)

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives ;

$$f \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad g \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad h \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f [0, 1] \longrightarrow [0, 2]$$

$$x \longmapsto x^2, \quad x \longmapsto x^2, \quad x \longmapsto x + x^3, \quad x \longmapsto x^2 + x^3, \quad x \longmapsto x^2,$$

$$f \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x + x^4.$$

Exercice(11)

1/ Déterminer le complémentaire dans \mathbb{R} des parties suivantes :

$$A_1 =]-\infty, 0], A_2 =]-\infty, 0[, A_3 =]0, +\infty[, A_4 = [0, +\infty[, A_5 =]1, 2[, A_6 = [1, 2[,$$

2/ Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[, B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$.

Comparer les ensembles suivantes $C_{\mathbb{R}}A$ et $C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$.

Exercice(12)

Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Montrer que :

Si f est strictement monotone, alors f est injective.