

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2017/2018

Liste 1 de TD d'Algèbre MI

Chapitre 1: Partiel: **Logique propositionnelle**

Exercice 1. On dit que "*P* ou exclusif *Q*" est vrai si *P* ou *Q* est vrai mais pas simultanément *P* et *Q*. Ecrire la table de vérité du "*ou exclusif*".

Solution: C'est facile. **Remarque:** Ce "*ou exclusif est important*" dans certains cas d'assertions, comme par exemple si on veut montrer que $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$. Comme on a à supposer que *A* ou *B* est vraie, alors on peut supposer *A* vraie et *B* fausse, ou *A* fausse et *B* vraie, puis on arrive à *C* vraie par un raisonnement mathématique correct. Autrement, si on suppose que *A* vraie et *B* vraie en même temps, d'où le "*ou inclusif*", alors il serait parfois impossible de trouver *C*. Voir exercice fait en cours.

Exercice 2. Evaluer (donner la valeur de vérité) les formules suivantes en considérant uniquement les valeurs des variables données:
 $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (*Q fausse*), P et $(P \text{ ou } Q)$ (*Q vraie*), P ou $(Q \Rightarrow R)$ (*Q fausse*).

Solution: Si *Q fausse*, alors $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est vraie pour toute valeur de vérité de *P* et de *R*.
Si *Q vraie*, alors P ou Q vraie pour toute valeur de *P*. Mais si *P* est vraie alors P et $(P \text{ ou } Q)$ est vraie et si *P* est fausse alors P et $(P \text{ ou } Q)$ est fausse.
Si *Q fausse*, alors $Q \Rightarrow R$ est vraie et par suite P ou $(Q \Rightarrow R)$ est vraie pour toute valeur de *P* et de *R*.

Exercice 3. Simplifier l'expression: $(\bar{P} \text{ et } Q)$ ou $(\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$ ou $(P \text{ et } Q)$.
L'assertion \bar{A} est la négation de l'assertion *A*.

Solution: On va discuter selon les valeurs de vérité de *P* et de *Q*. (Dresser une table de vérité)

Si *P* et si *Q* sont vraies toutes les deux alors:

\bar{P} et Q est fausse, \bar{P} et \bar{Q} est fausse et P et Q est vraie, d'où $(\bar{P} \text{ et } Q)$ ou $(\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$ ou $(P \text{ et } Q)$ **vraie**.

Si *P* est vraie et si *Q* est fausse alors:

\bar{P} et Q est fausse, \bar{P} et \bar{Q} est fausse et P et Q est fausse, d'où $(\bar{P} \text{ et } Q)$ ou $(\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$ ou $(P \text{ et } Q)$ **fausse**.

Si *P* est fausse et si *Q* est vraie alors:

\bar{P} et Q est vraie, \bar{P} et \bar{Q} est fausse et P et Q est fausse, d'où $(\bar{P} \text{ et } Q)$ ou $(\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$ ou $(P \text{ et } Q)$ **vraie**.

Si P et si Q sont fausses toutes les deux alors:

\overline{P} et Q est fausse, \overline{P} et \overline{Q} est vraie et P et \overline{Q} est fausse, d'où $(\overline{P}$ et $Q)$ ou $(\overline{P}$ et $\overline{Q})$ ou $(P$ et $Q)$ **vraie**.

On remarque bien que les valeurs de vérité obtenues **dans cet ordre**, qui est celui de l'ordre habituel de la table de vérité, sont bien les mêmes de l'assertion $P \Rightarrow Q$.

Exercice 4. Soient n et m deux entiers naturels.

1. Donner un équivalent de $(n < m) \Rightarrow (n = m)$.
2. Donner la négation de $(n \leq m) \Rightarrow (n > m)$.

Solution: Il y a deux équivalents simples pour une implication: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P}$ ou $Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Donc $[(n < m) \Rightarrow (n = m)] \Leftrightarrow [(n \geq m) \text{ ou } (n = m)]$ ou $[(n < m) \Rightarrow (n = m)] \Leftrightarrow [(n \neq m) \Rightarrow (n \geq m)]$.

Pour la négation: $\overline{[(n \leq m) \Rightarrow (n > m)]} \Leftrightarrow [(n \leq m) \text{ et } (n \leq m)] \Leftrightarrow (n \leq m)$.

Exercice 5. Dire si c'est vrai ou faux: ($x \in \mathbb{R}$)

- 1- $x > 5 \Rightarrow x > 3$.
- 2- $x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$.
- 3- $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$.
- 4- $x = 0 \Rightarrow x \leq 0$.
- 5- $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = 1$.

Solution: 1. Vrai, si $x > 5$ alors certainement $x > 3$,

2. Vrai, $x^3 = -1$ a une seule solution dans \mathbb{R} , $x = -1$ donc $x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$ et si $x = -1$ alors $x^3 = -1$ d'où équivalence.

3. Faux, $x^2 = 9$ a deux solutions $x = -3$ et $x = 3$ donc $x^2 = 9 \Rightarrow (x = 3$ ou $x = -3)$, mais $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ est vraie.

4. Vrai, $x = 0 \Rightarrow (x = 0$ ou $x < 0)$

5. Faux, si $z \in \mathbb{C}$ alors z est quelconque dans \mathbb{C} et par suite $|z|$ peut-être différent de 1, exemple: prendre $z = 2i$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère les assertions suivantes:

$P : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$, $Q : \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et $R : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$.

Parmi les implications suivantes lesquelles sont vraies?

1. $P \Rightarrow Q$
2. $Q \Rightarrow P$
3. $Q \Rightarrow R$

4. $\overline{R} \Rightarrow Q$

5. $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Solution: 1. Vrai: si pour tout x réel on a $f(x) = 0$, alors certainement il existe au moins x réel tel que $f(x) = 0$.

2. Faux: s'il existe au moins x réel tel que $f(x) = 0$ alors on ne peut pas confirmer qu'on a pour tout x réel, $f(x) = 0$.

3. Faux: pensons à la contraposée c'est à dire: $\overline{R} \Rightarrow \overline{Q}$, avec $\overline{R} : (\exists x \in \mathbb{R}; f(x) \leq 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0)$ et $\overline{Q} : \forall x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0$.

On part de \overline{R} vraie, c'est à dire $\exists x \in \mathbb{R}; f(x) \leq 0$ vraie et $\exists x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0$ vraie. Ces deux assertions sont vraies donc l'intersection nous donne $\exists x \in \mathbb{R}; f(x) = 0$. De ceci on ne peut pas déduire \overline{Q} c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0$.

4. Vrai: Les deux assertions qui constituent \overline{R} sont vraies donc l'intersection nous donne $\exists x \in \mathbb{R}; f(x) = 0$, d'où Q .

5. Vrai: c'est la contraposée de 1. qui est vraie.