**Département de Mathématiques**
**Faculté des Sciences**
**Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen**

Année Universitaire 2017/2018
Liste 2 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 1: Partie2: **Raisonnement**

**Exercice1.** 1- Montrer par contraposition que si le reste de la division de $x^2 + y^2 + z^2$ par $2^n$ est $-1$ alors $x$, $y$ et $z$ sont, soit tous les trois impairs, soit deux sont pairs.
2- Reprendre la démonstartion précédente en utilisant un raisonnement par l'absurde.

**Solution:** On veut montrer que :

**SI** pour tous $x$, $y$, $z$, et pour tout $n$, $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1\ [2^n]$ **ALORS** $x$, $y$, $z$ **sont tous imapirs** *ou* **deux sont pairs.**

La phrase après ALORS est la suivante: [($x$ impair) *ET* ($y$ impair) *ET* ($z$ impair)] *OU* [($x$ pair) ET ($y$ pair)]. (On peut penser à prendre $z$ impair dans la deuxième assertion aussi, c.à.d. dans [($x$ pair) ET ($y$ pair)])

**Remarque**: Dans [($x$ pair) ET ($y$ pair)], on peut remplacer ($x$ et $y$) par ($x$ et $z$) ou ($y$ et $z$) et ceci du fait qu'il y a une symétrie par rapport à $x, y$ et $z$ dans l'expression: $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1\ [2^n]$. Donc un choix suffit à cause de la symétrie.

**Par contraposition**: Montrons que **SI** [($x$ pair) *OU* ($y$ pair) *OU* ($z$ pair)] *ET* [($x$ impair) *OU* ($y$ impair)] **ALORS** il existe au moins $x$, $y$, $z$, et $n$ tel que $x^2 + y^2 + z^2$ est non congru à $-1\ [2^n]$.

On part de: [($x$ pair) *OU* ($y$ pair) *OU* ($z$ pair)] **ET** [($x$ impair) *OU* ($y$ impair)] **VRAI,** donc on part de : [($x$ pair) *OU* ($y$ pair) *OU* ($z$ pair)] **VRAI ET** [($x$ impair) *OU* ($y$ impair)] **VRAI.**

Pensons au *OU* exclusif !
On remarque que "$z$ **pair"** figure dans [($x$ pair) *OU* ($y$ pair) *OU* ($z$ pair)] et aussi dans [($x$ impair) *OU* ($y$ impair)]. (Voir la phrase écrite entre parenthèses à la $5^{ième}$ et $6^{ième}$ lignes). Donc Prendre $z$ pair (sans penser à la parité de $x$ et $y$,d'ou le *OU* exclusif) nous donne [($x$ pair) *OU* ($y$ pair) *OU* ($z$ pair)] **VRAI ET** [($x$ impair) *OU* ($y$ impair)] **VRAI.**
Maintenant cherchons au moins un $x$, un $y$ et un $n$, avec un $z$ pair, de telle manière que $x^2 + y^2 + z^2$ ne soit pas congru à $-1\ [2^n]$.

On peut choisir:
$x$ impair, $y$ pair, $z$ pair et $n = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4(k^2 + k + k'^2 + k''^2) + 1 \equiv 0$ [1] ou
$x$ pair, $y$ impair, $z$ pair et $n = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4(k^2 + k'^2 + k' + k''^2) + 1 \equiv 0$ [1] ou
$x$ impair, $y$ impair, $z$ pair et $n = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 4(k^2+k+k'^2+k'+k''^2)+2 \equiv 0$ [2]. Les deux premiers choix sont triviaux donc pas vraiment importants. Le troisième est le bon choix. D'ou la contraposée.

**AUTRE METHODE pour la contraposée:**
Montrons que **SI** [($x$ pair) *OU* ($y$ pair) *OU* ($z$ pair)] *ET* [($x$ impair) *OU* ($y$ impair)] **ALORS** il existe au moins $x$, $y$, $z$, et $n$ tel que $x^2 + y^2 + z^2$ est non congru à $-1$ $[2^n]$.

[($x$ pair) *OU* ($y$ pair) *OU* ($z$ pair)] *ET* [($x$ impair) *OU* ($y$ impair)]
$\Longleftrightarrow$ [($x$ pair) *ET* ($x$ impair)] *OU* [($y$ pair) *ET* ($x$ impair)] *OU*
[($z$ pair) *ET* ($x$ impair)] *OU* [($x$ pair) *ET* ($y$ impair)] *OU*
[($y$ pair) *ET* ($y$ impair)] *OU* [($z$ pair) *ET* ($y$ impair)]

Or les assertions [($x$ pair) *ET* ($x$ impair)] et [($y$ pair) *ET* ($y$ impair)] sont FAUSSES, donc il reste :
[($y$ pair) *ET* ($x$ impair)] *OU* [($z$ pair) *ET* ($x$ impair)] *OU*
[($x$ pair) *ET* ($y$ impair)] *OU* [($z$ pair) *ET* ($y$ impair)].

Puisque [($x$ pair) *ET* ($x$ impair)] et [($y$ pair) *ET* ($y$ impair)] sont FAUSSES, alors supposons ($x$ impair) et ($y$ impair).
Dans ce cas il reste: [($z$ pair) *ET* ($x$ impair)] *OU* [($z$ pair) *ET* ($y$ impair)].
<u>En conclusion:</u> pour $x$ impair, $y$ impair, $z$ pair et $n = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4(k^2 + k + k'^2 + k' + k''^2) + 2 \equiv 0$ [2]. D'ou la contraposée.

**<u>Par l'absurde:</u>**
On veut montrer par l'absurde que :

**SI** pour tous $x$, $y$, $z$, et pour tout $n$, $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ $[2^n]$ **ALORS** $x$, $y$, $z$ **sont tous imapirs** *ou* **deux sont pairs.**

Dans ce cas supposons que toute l'implication ci-dessus est fausse, c.à.d, on a:
[ pour tous $x$, $y$, $z$ et pour tout $n$, $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ $[2^n]$ ] ET
[[(*x pair*) *OU* (*y pair*) *OU* (*z pair*)] *ET* [(*x impair*) *OU* (*y impair*)]] .

On part de:
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ $[2^n]$ VRAI pour tous $x$, $y$, $z$ et pour tout $n$
et [[(*x pair*) *OU* (*y pair*) *OU* (*z pair*)] *ET* [(*x impair*) *OU* (*y impair*)]] VRAI.
Maintenant il faut faire un raisonnement et trouver une contradiction.

Comme $[x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1\ [2^n]\ ]$ est VRAI pour tous $x$, $y$, $z$ et pour tout $n$, alors ça sera vrai pour $x = 1$, $y = 1$ et $n = 1$. Bien sûre, pour $x = 1$ et $y = 1$, $[[(x\ pair)\ OU\ (y\ pair)\ OU\ (z\ pair)]\ ET\ [(x\ impair)\ OU\ (y\ impair)]]$ est VRAI à condition que $z$ soit pair. En remplaçant $x = 1$, $y = 1$ et $n = 1$ dans $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1\ [2^n]$, on trouve $2 + z^2 \equiv -1\ [2]$, soit $z^2 \equiv -1\ [2]$, soit $z$ impair, donc contardiction car $z$ est pair.

**Exercice2.** Soit $n$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels, $x_0$, $x_1$, ..., $x_n$ de $[0, 1]$ vérifiant: $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq 1$. On veut démonter par l'absurde l'assertion $P$ suivante:
$P$ : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$.

1- Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à $P$.
2- Ecrire la négation de cette formule logique.
3- Rédiger une démonstartion par l'absurde de $P$.

**Solution:** 1) Selon l'énoncé on a, en supposant que $i < j$:

$$\exists\ i = 1, ..., n;\ \exists\ j = 1, ..., n \text{ tel que } |x_j - x_i| = x_j - x_i \leq \frac{1}{n}.$$

Puisqu'il existe deux nombres $x_i$ et $x_j$ qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$ alors certainement il existe deux nombres consécutifs $x_i$ et $x_{i-1}$ qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$. Donc on peut écrire la formule logique équivalente à $P$ comme suit:

$$\exists\ i = 1, ..., n \text{ tel que } (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{1}{n}.$$

2) La négation est: $\forall\ i = 1, ..., n;\ (x_i - x_{i-1}) > \frac{1}{n}$.

3) Par l'absurde on suppose que: $\exists\ i = 1, ..., n$ tel que $(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{1}{n}$ est fause. Donc on suppose que $\forall\ i = 1, ..., n;\ (x_i - x_{i-1}) > \frac{1}{n}$ est vraie. Puisque $(x_i - x_{i-1}) > \frac{1}{n}$ est vraie pour toutes les valeurs de $i$ dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ alors on aura:
$(x_n - x_{n-1}) > \frac{1}{n}$, $(x_{n-1} - x_{n-2}) > \frac{1}{n}$, $(x_{n-2} - x_{n-3}) > \frac{1}{n}$, .....et $(x_1 - x_0) > \frac{1}{n}$, d'où :
$(x_n - x_0) = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_1 - x_0) > n\ \frac{1}{n}$.

Donc $x_n - x_0 > 1$, ce qui est absurde.

**Exercice3.** Démontrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$, $n^2 \leq 2^n$.

**Solution:** Pour $n = 4$ ona $4^2 \leq 2^4$ soit $16 \leq 16$ ce qui est vrai. Fixons maintenant $n$ dans $\mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$ et supposons que $n^2 \leq 2^n$. Montrons alors que pour ce $n$ fixé on a $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.
$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1$. Montrons maintenant que $2n+1 \leq 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$. Pour $n = 4$ on a $9 \leq 2^4$ soit $9 \leq 16$ ce qui est vrai. Fixons $n$ dans $\mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$ et supposons que $2n + 1 \leq 2^n$ et montrons que pour ce $n$ fixé on a $2(n+1)+1 \leq 2^{n+1}$. On a bien $2(n+1)+1 = 2n+1+2 \leq 2^n+2 \leq 2^n+2^n$. Donc $(n+1)^2 \leq 2^n + 2^n$ soit $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.