UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTÉ DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ
F È S
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2022/2023
Filière : SMA-SMI
Semestre : S2, Module : Analyse 3

S. M

Jawad El Moubit

Série $N°3$

Développement limité et Applications

Exercice 1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) - x & si \quad x \geq 0, \\ (1-e^x)\sin\left(\frac{x}{2}\right) & si \quad x < 0. \end{cases}$$

1. *f admet-elle un D.L. en 0 ?*
2. *Qulle est l'ordre maximal du D.L. en 0.*

Exercice 2. *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$g(x) = \begin{cases} x^6 \cos\left(\frac{1}{x^5}\right) & si \quad x \neq 0, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

$o(x^n) = x^n \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \to 0$

1. *Montrer que g admet un D.L. au $v(0)$ à l'ordre 5.*
2. *Montrer que g n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 3. *Déterminer le D.L. ou le D.L.G. des fonctions suivantes au $v(x_0)$ à l'ordre n demandé*

1. $f(x) = \sqrt{1+e^x}$ $\quad x_0 = 0 \quad n = 2$
2. $f(x) = \ln(1+chx)$ $\quad x_0 = 0 \quad n = 4$
3. $f(x) = \frac{\arcsin x}{x ch x}$ $\quad x_0 = 0 \quad n = 2$
4. $f(x) = \frac{e^x - 1}{\cos x - 1}$ $\quad x_0 = 0 \quad n = 1$
5. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ $\quad x_0 = 1 \quad n = 3$
6. $f(x) = x \arg sh e^{1/x}$ $\quad x_0 = +\infty \quad n = 1$
7. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln\sqrt{1+x^2}$ $\quad x_0 = +\infty \quad n = 3$

Exercice 4. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan(\sin x) - x}{x^3}$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + sh\frac{1}{n}\right)^n$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(\ln x)^2}{ch(x-1) - 1}$

Exercice 5. *Déterminer α et β pour que $f(x) = \frac{e^x}{\cos x} + \alpha x + \beta x^2$ admette :*

a) $(0,1)$ *comme maximum.*

b) $(0,1)$ *comme minimum.*

c) $(0,1)$ *comme point d'inflexion.*

Exercice 6. *(examen rattrapage 2021/2022). Considérons la fonction définie par :*

$$f(x) = (1+x)^{1/x} \quad si\ x \neq 0 \quad et\ f(0) = e.$$

1. *Montrer que* f *est continue au point* 0.
2. *Donner le D.L. de* f *au* $v(0)$ *à l'ordre 2. Déduire la valeur de* $f''(0)$.
3. *Donner l'equation de la tangente en* 0 *et la position de la courbe par rapport à la tangente au* $v(0)$. *(cette question n'a pas fait partie de l'examen)*
4. *Déterminer la nature du point* $(0,e)$ *pour la fonction* $g(x) = (1+x^2)^{1/x^2}$.

Exercice 7. *(examen 2021/2022). Considérons la fonction définie par :*

$$f(x) = (x^2-1)\arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. *Ecrire le D.L.G. de* f *au* $v(+\infty)$.
2. *Déduire l'asymptote à la courbe de* f *au* $v(+\infty)$ *et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.*

Exercice 8. *Soit la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = x\left(1+\ln\left(1+x^2\right)\right).$$

1. *Montrer que* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Donner le D.L. de* f *au* $v(0)$ *à l'ordre 5.*
3. *Montrer que* f *admet une fonction réciproque définie sur* $\mathbb{R}$.
4. *On admet que* f^{-1} *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que* f^{-1} *admet un D.L. au* $v(0)$ *à l'ordre 5 de la forme*

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5), \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la relation $f(f^{-1}(x)) = x$, *déduire la D.L. de* f^{-1} *à l'ordre 5.*

Exo1

Rappel : les Formules

DL de $\sin x$ au $V(0)$ à l'ordre 5.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

DL de $\sin x$ au $V(0)$ à l'ordre 6.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

$o(x^n) = x^n \cdot \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \to 0$

①
$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) - x & \text{si } x \geq 0 \\ (1-e^x)\sin\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

f admet un DL au $V(0)$ à l'ordre 0.

ssi

f admet une limite en 0 ($\lim f(x) = l$)

$f(x) = a_0 + \varepsilon(x)$

$\varepsilon(x) = o(1)$

$\lim_{x \to 0} f(x) = a_0$, $\varepsilon(x) = f(x) - a_0 \to 0$

• Vérification de début du DL.

* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(1+x) - x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - e^x)\sin\frac{x}{2} = 0$

Donc f admet une limite en 0.

Par suite f admet un D.L à l'ordre 0 au $V(0)$

$$f(x) = 0 + \varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x) = o(1)$

② D.L à l'ordre 1 au $V(0)$

* $\ln(1+x) - x = x + o(x) - x$
$= o(x)$

* $1 - e^x = 1 - (1 - x) + o(x) = -x + o(x)$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + o(x)$

$(1-e^x)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = o(x)$

Donc $f(x) = 0 + o(x)$

→ DL à l'ordre 2 au $V(0)$

$\ln(1+x) - x = x - \frac{x^2}{2} - x + \underline{o(x^2)}$

$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

C'est pas le même $o(x^n)$ car ~~lim f(x) → 0~~ $o(x^n) = x^n \cdot \varepsilon(x)$

$1 - e^x = 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$

$= -x - \frac{x^2}{2} + \underline{o(x^2)}$

$\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x^2)$

$\left(\sin U = U + o(x^2)\right)$

$(1-e^x)\sin\frac{x}{2} = \frac{-x^2}{2} + \underline{o(x^2)}$

$$\boxed{f(x) = \frac{-x^2}{2} + o(x^2)}$$

→ DL à l'ordre 3 au $V(0)$.

$\ln(1+x) - x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x + o(x^3)$

$= \frac{-x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$1 - e^x = 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)$

$1 - e^x = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)$

$\sin U = U - \frac{U^3}{6} + o(x^3)$

$(1-e^x)\sin\frac{x}{2} = \frac{-x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$

si f admet

02

si f admet un D.L à l'ordre 3.

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$

si $x > 0$, $a_3 = \frac{1}{3}$ } impossible

si $x < 0$, $a_3 = \frac{-1}{4}$

Donc f n'admet pas de D.L au $V(0)$ à l'ordre 3.

Donc l'ordre maximal du D.L au $V(0)$ est 2.

EX 02

① $g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^5}\right) \cdot \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

M.q g admet un D.L au $V(0)$ à l'ordre 5

Déf $g(x) = \underset{d P \leq 5}{P(x)} + o(x^5)$

On a $g(x) = o(x^5) = x^5 . \varepsilon(x) \to 0$

$\cancel{\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^5}} = \lim_{x \to 0} x \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x^5}\right)}_{\text{bornée}} = 0$

$g(x) = 0 + o(x^5)$

Donc g admet un D.L au $V(0)$ à l'ordre 5.

② M.q g n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cos\frac{1}{x^5} = 0$

~~$\Rightarrow g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 0$~~

g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

si $x \neq 0$, $g(x) = x^6 \cos\left(\frac{1}{x^5}\right)$

$$g'(x) = 6x^5 \cos\frac{1}{x^5} - x^6\left(\frac{-5}{x^6}\right)\sin\frac{1}{x^5}$$

14/04/2023:

$$g'(x) = 6x^5 \cos\frac{1}{x^5} + 5\sin\frac{1}{x^5}$$

$$\lim_{x\to 0} g'(x) \neq g'(0)$$

$$x_n \longrightarrow 0$$

$$g'(x_n) \not\longrightarrow g'(0) = 0$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[5]{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \qquad \sin\frac{1}{x_n^5} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g'(x_n) = \underbrace{6x_n^6 \cos\frac{1}{x_n^5}}_{\to 0} + 5\sin\frac{1}{x_n^5} \longrightarrow 5 \neq 0.$$

Exo3

① $f(x) = \sqrt{1+e^x}$, $x_0 = 0$, $n = 2$

On sait que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \cancel{+ \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}$

$$f(x) = \sqrt{2 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)}$$

et $\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}}$

posons $U = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \cancel{+ o(x^2)}$

Vérifions D.L de a_0 ~~de f~~

$\lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{2} = a_0$.

$$\to (1+U)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}U + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}U^2 + o(U^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{32}x^2 + o(x^2)$$

et $\boxed{f(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{32}x^2 + o(x^2)}$

2) $f(x) = \ln(1 + \operatorname{ch} x)$, $x_0 = 0$, $n = 4$.

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$1 + \operatorname{ch}(x) = 2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln(1 + \operatorname{ch}(x)) = \ln\left(2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$= \ln(2) + \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48}}_{u \to 0} + o(x^4)\Big)$$

posons $u(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48}$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(x^4)$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{1}{2}\,\frac{x^4}{16} + o(x^4)$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16 \times 3} - \frac{x^4}{16 \times 2} + o(x^4)$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = \underbrace{\ln 2}_{\lim_{x \to 0} f(x) =} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4)$$

Rappel :

D.L de $\frac{f}{g}$: si $\lim_{x \to 0} g(x) \neq 0$

DL f à ordre n.

DL g à ordre n.

pusant la division suivant les puissances ↗ à l'ordre n.

* si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

$a_p \neq 0$

$$\frac{f}{g} = \frac{a_p x^p + \dots + a_{n+q} x^{\boxed{n+q}} + o(x^{\boxed{n+1}})}{b_q x^q + \dots + b_{n+q} x^{n+q} + o(x^{n+1})}$$

$b_q \neq 0$

→ si $p \geq q$ $\frac{f}{g}$ admet un D.L au $V(0)$

$$= \frac{f}{g} = \frac{a_p x^{p-q} + \cdots + a_{n+q} x^n + o(x^n)}{b_q + \cdots + b_{n+q} x^n + o(x^n)}.$$

→ si $p < q$

$$x^{q-p} \frac{f}{g} = \frac{a_p x^q + \cdots}{b_q x^q + \cdots}$$

$\frac{f}{g}$ à l'ordre n.

$x^{q-p} \frac{f}{g}$ soit à l'ordre $\boxed{n-q+p}$.

D.L à l'ordre 1 au $V(0)$

$$\frac{\sin x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{x + \cdots}{\frac{x^2}{2} + \cdots}$$

ordre 2 ordre 1

$$\frac{x \sin x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{x^2 + \cdots + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + \cdots + o(x^4)}.$$

pour argsh, ...

$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$

$f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$

Fin rapp...

3) $f(x) = \frac{\cancel{\cdots}}{\cos \cancel{\cdots}} = \frac{\arcsin x}{x \operatorname{ch} x}$ $(DL)_2$ en 0.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\arcsin x = \arcsin(0) + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{x \operatorname{ch}(x)} =$$

$$= \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} = \frac{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 + \frac{x^2}{6} & 1 + \frac{x^2}{2} \\ \hline 1 - \frac{x^6}{2} & 1 - \frac{1}{3}x^2 \\ \hline -\frac{1}{3}x^2 & \end{array}$$

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}$$

4) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{\cos x - 1}$ $\qquad x_0 = 0 \quad , n = 1$

$$f(x) = \frac{x^0 + 1 \text{———}}{-\frac{x^2}{2} + \text{———}}$$

$$x f(x) = \frac{x(e^x - 1)}{\cos x - 1} = \frac{x^2 + \text{———}}{-\frac{x^2}{2} + \text{———}}$$

On va chercher le D.L au $V(0)$ à l'ordre 2 de $xf(x)$.

$x(e^x - 1)$ à l'ordre 4.

$\cos(x) - 1$ — — 4.

$$x f(x) = \frac{x\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)}{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

$$= \frac{x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

$$= \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} & -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} \\ \hline -1 + \frac{x^2}{12} & -2 - x - \frac{x^2}{2} \\ \hline \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} & \\ \hline \frac{x^2}{4} & \end{array}$$

$$x f(x) = -2 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(x) = \frac{-2}{x} - 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

19/04/2023

D.L au $V(x_0)$ on pose $t = x - x_0$ (à chaque fois on ramène la variable à zéro)

D.L au $V(\pm\infty)$ on pose $t = \frac{1}{x}$

Rappel :

si $\lim g(x) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ $DL_n f$ $DL_n g$

si $\lim g(x) = 0$ $\frac{f}{g} = \frac{a_p x^p + \text{———}}{b_q x^q + \text{———}}$ $b_q \neq 0$

si $p \geq q$ D.L . DLg

$$\frac{a_p x^p + \text{———} + o(x^{n+p})}{b_q x^q + \text{———} + x^{n+p}} = \frac{a_p x^{p-q} + \ldots + o(x^n)}{b_q + \text{———} + o(x^n)}$$

si $p < q$ $x^{p-q} \frac{f}{g}$ admet DL. l'ordre : $n+q-p$

$\frac{f}{g}$ admet un DLG

5) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ $x_0 = 1$, $n = 3$

On pose $t = x - 1$

$$f(x) = \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2} = \frac{t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)}{1 + 2t + t^2}$$

$$= t - \frac{5}{2}t^2 + \frac{13}{3}t^3 + o(t^3)$$

$$\begin{array}{l|l} t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} & 1 + 2t + t^2 \\ \vdots & t - \frac{5}{2}t^2 + \frac{13}{3}t^3 \\ \hline \frac{13}{3}t^3 & \end{array}$$

d'où $f(x) = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 + o$

6) $f(x) = x \,\operatorname{argsh}(e^{\frac{1}{x}})$, $x_0 = +\infty$, $n = 1$

on pose $t = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow f(x) = \frac{\operatorname{argsh}(e^t)}{t}$

or

$$(\operatorname{argsh}(e^t))' = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}} = \frac{1 + t + o(t)}{\sqrt{1 + 1 + 2t + o(t)}}$$

$$= \frac{1 + t + o(t)}{\sqrt{2}\,(1 + t + o(t))^{\frac{1}{2}}}$$

08

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+t+o(t)\right)\times\left(1+t+o(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+t)\left(1-\frac{1}{2}t\right)+o(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}t+t\right)+o(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}t+o(t)$$

$$\operatorname{argsh}(e^t) = \operatorname{argsh}(e^0)+\frac{1}{\sqrt{2}}t+\frac{1}{4\sqrt{2}}t^2+o(t^2)$$

$$= \ln(1+\sqrt{2})+\frac{1}{\sqrt{2}}t+\frac{1}{4\sqrt{2}}t^2+o(t^2)$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\operatorname{argsh}(e^t)$$

$$= \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{t}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f(x)=$$

$x = \frac{1}{t}$

$$f(x) = \underbrace{x\left(\ln(1+\sqrt{2})\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}}_{y}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$y = ax+b$
l'équation asymptote

$$f(x)-y \sim \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{x}$$

au $V(+\infty)$: $f(x)-y>0$.

au $V(-\infty)$: $f(x)-y<0$.

7) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$. $x_0=+\infty$, $n=3$;

$$= \ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)$$

On pose $t=\frac{1}{x}$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}+1\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}+1\right)$$

$$= \ln\left((t^2+1)^{-\frac{1}{2}}+1\right)$$

$$= \ln\left(1+1-\frac{1}{2}t^2+o(t^3)\right) = \ln\left(2-\frac{1}{2}t^2+o(t^3)\right)$$

$= \ln(2(1-\frac{1}{4}t^2+o(t^3)))$

$= \ln(2) + \ln(1-\frac{1}{4}t^2+o(t^3))$

$= \ln(2) - \frac{1}{4}t^2 + o(t^2)$

$= \ln(2) \frac{1}{4x^2} + o(\frac{1}{x^3})$

Exo4

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(\sin x)-x}{x^3}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} = (1+u^2)^{-1} = 1-u^2+o(u^2)$

$\arctan(u) = \arctan 0 + u - \frac{u^3}{3} + o(u^3) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

$\arctan(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{3}(x-\frac{x^3}{6})^3 + o(x^3)$

$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$= x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

d'où $\boxed{\lim \frac{x - \frac{1}{2}x^3 - x}{x^3} = -\frac{1}{2}}$

10/05/2023.

2) $\lim_{n\to+\infty} (1+sh(\frac{1}{n}))^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+sh(\frac{1}{n}))}$

on pose $t = \frac{1}{n}$, $\lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(1+sh t)}{t}} =$

$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(1+t+o(t))}{t}}$

$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{t+o(t)}{t}} = \lim_{t\to 0} e^{1+o(t)} = \boxed{e}$

- $\lim \left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n = \lim_{x\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)}$

$= \lim e^{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{2^t+3^t}{2}\right)}$

$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{e^{t\ln(2)}+e^{t\ln(3)}}{2}\right)}$

$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t\ln 2+1+t\ln(3)+o(t)}{2}\right)}$

$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\underline{\ln\left(1+\left(\frac{\ln 2+\ln(3)}{2}\right)t+o(t)\right)}}$ D.L

$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\left(\left(\frac{\ln 2+\ln(3)}{2}\right)t+o(t)\right)}$

$= \lim_{t\to 0} e^{\ln\sqrt{6}+o(1)} = e^{\ln(\sqrt{6})} = \boxed{\sqrt{6}}$

- $\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{Ch(x-1)-1}$ $\cancel{= \lim_{t\to 0} \frac{t^2+o(t^2)}{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}}$

on pose $t = x-1$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)^2}{Ch(t)-1}$

$= \lim \frac{\left(t-\frac{t^2}{2}\right)^2+o(t^2)}{1+\frac{t^2}{2}-1+o(t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+o(t^2)}{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} = \boxed{2}$

Exo 5 Rappel :

$(x_0, f(x_0))$ est un maximum relatif,

si $\forall x \in V_{x_0}$

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots$

$f(x) = a_0 = a_1 (x-x_0)^p + o(x-x_0)^p$

$f(x) - f(x_0) = a_p (x-x_0)^p + o(x-x_0)^p$

Si p est pair $(x-x_0)^p \geq 0$

Si $a_p > 0$, $f(x) - f(x_0) \geq 0$

$(x_0, f(x_0))$ est un minimum.

Si $a_p < 0$ $f(x) - f(x_0) \leq 0$

$(x_0, f(x_0))$ est un maximum.

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos x} + \alpha x + \beta x^2$

$$f(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} + \alpha x + \beta x^2$$

$$\begin{array}{r|l}
1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} & 1 - \frac{x^2}{2} \\
\hline
-1 + \frac{x^2}{2} & 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 \\
\hline
x + x^2 + \frac{x^3}{6} & \\
-x \quad + \frac{x^3}{2} & \\
\hline
x^2 + \frac{2}{3}x^3 & \\
-x^2 & \\
\hline
\frac{2}{3}x^3 &
\end{array}$$

$f(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \alpha x + \beta x^2 + o(x^3)$

$f(x) = 1 + (1+\alpha)x + (1+\beta)x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

$f(x) - 1 \sim (1+\beta)x^2 \iff \boxed{\begin{array}{l}\alpha + 1 = 0 \\ 1 + \beta \neq 0\end{array}}$

$(0,1)$ maximum si $\alpha = -1$, $1 + \beta < 0$

$(0,1)$ minimum si $\alpha = -1$, $1 + \beta > 0$

Si $1 + \alpha = 0$ et $1 + \beta = 0$ ce n'est pas ni un maximum, ni un minimum.
$f(x) - 1 \sim \frac{2}{3}x^3$

$y = 1 + (1+\alpha)x$ est l'équation de la tangente en 0.

$f(x) - y \sim \frac{2}{3}x$

$(0,1)$ est un point d'inflexion $\Leftrightarrow$ $1+\beta = 0$

EXO 6 SR : 2021/2022

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = e \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{x+o(x)}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{1+o(1)}$

$= e = f(0)$, d'où f est continue au point 0.

2) $f(x) = (1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$= e^{\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x}}$

$= e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$

$= e^{1} \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$

$= e\left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^2)\right]$

$f(x) = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8}\right) + o(x^2)$

$$\boxed{f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11}{24}ex^2 + o(x^2)} \quad DL_2(0)$$

D'autre part :

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2)$

si $\lim_{x \to 0} g(x) \neq 0$: DL_n le rég par division suivant puissance croissante.

si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$: $\frac{f}{g} = \frac{a_p x^p \dots}{b_q x^q \dots}$

si $p < q \to \frac{f}{g}$ n'admet pas DL_q; $x^{q-p}\frac{f}{g}$ admet un DL, si l'ordre $n+q-p$

si $p \geq q$ $\frac{f}{g}$ admet un DL_n : $DL_{(n+q)}(f/g)$, simplification par x^q.

f/g

$$\frac{f''(0)}{2} = \frac{11}{24}e \Rightarrow \boxed{f''(0) = \frac{11}{12}e}$$

3) $y = e - \frac{e}{2}x$ est l'équation de la tangente

$$f(x) - y \sim \frac{11}{24}ex^2 > 0$$

La courbe est au dessus de la tangente au $V(0)$

4) $g(x) = (1+x^2)^{1/x^2} = f(x^2)$

$$g(x) = f(x^2) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{11}{24}ex^4 + o(x^4)$$

$$g(x) - e \sim -\frac{e}{2}x^2$$

$p = 2$ pair , $-\frac{e}{2} < 0$,

donc $(0, e)$ est un maximum.

$\boxed{\text{EXO7}}$

$$f(x) = (x^2 - 1)\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) on pose $t = \frac{1}{x}$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)\arcsin(t) = \frac{(1-t^2)\arcsin t}{t^2}$$

$$= \frac{t + \text{— —}}{t^2 + \text{— —}} \cdot \frac{1 + \text{———} + o(t^2)}{1 + \text{— —} + o(t^2)}$$

ordre 3 ordre 4

$$t\, f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t(1-t^2)\arcsin t}{t^2} = \frac{(1-t^2)\arcsin t}{t}$$

$$(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$\arcsin t = \arcsin 0 + t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$(1-t^2)\arcsin t = (1-t^2)\left(t + \frac{t^3}{6}\right) + o(t^3)$$

Analyse 03/TD/série 03/ — /11/05/2023

Asymptote et position : DL au moins à l'ordre 1

Tangente et position : DL au moins à l'ordre 2

$$= t + \frac{t^3}{6} - t^3 + o(t^3) = t - \frac{5}{6}t^3 + o(t^3)$$

$$t f\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - \frac{5}{6}t^2 + o(t^2) \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - \frac{5}{6}t + o(t)$$

$$\boxed{f(x) = x - \frac{5}{6}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$y = x$ est l'équation de l'asymptote au $V(\pm\infty)$

Position de la courbe à l'asymptote :

$f(x) - y \sim -\frac{5}{6}\frac{1}{x}$

- au $V(+\infty)$; $-\frac{5}{6}\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow f(x) < y$ $\boxed{\text{au dessous de asymptote au } V(+\infty)}$
- au $V(-\infty)$; $-\frac{5}{6}\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f(x) > y$ $\boxed{\text{au dessus de asymptote au } V(-\infty)}$

EX 08

1/ f est de Classe C^∞ car f est produit et composé de fonction de Classe C^∞.

Si on a un point qui fait problème on va étudier (dérivabilité)

2/ $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$

$1 + \ln(1+x^2) = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

$f(x) = x + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$

3/ $f'(x) = \underbrace{1}_{\geq 0} + \underbrace{\ln(1+x^2)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{2x^2}{1+x^2}}_{\geq 0} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

f est croissante sur $\mathbb{R}$.

⚠ Jamais

$f(x) = ax + bx^2 + \dots + o(x^n)$

$\Downarrow$

$f'(x) = a + 2bx + \dots + o(x^{n})$

On ne passe pas le DL de f à DL de f'

f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

(car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$)

Donc f admet une fct réciproque définie sur $\mathbb{R}$.

4/ f est impaire $\Rightarrow f^{-1}$ est impaire $\Rightarrow f^{-1}(x) = P(x) + o(x^5)$ d'DL 5

alors P est impaire $\Rightarrow P(x) = ax + bx^3 + cx^5$

$f \circ f^{-1}(x) = x$ $\qquad \lim_{x\to 0} f^{-1}(x) = 0$

$f \circ f \longrightarrow 0$

$$f(x) = x + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$$

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5))$$

$$= ax + bx^3 + cx^5 + (ax + bx^5 + cx^5)^3 - \frac{1}{2}(ax + bx^5 + cx^5)^5 + o(x^5)$$

$$= ax + bx^3 + cx^5 + a^3x^3 + 3a^2x^3 + 3a^2x^2bx^3 - \frac{1}{2}a^5x^5 + o(x^5) = x$$

$$\Leftrightarrow ax + (b + a^3)x^3 + (c + 3a^2b - \frac{1}{2}a^5)x^5 + o(x^5) = x$$

D'après l'unicité du DL au $\mathcal{V}(0)$, on a:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a^3 = 0 \Rightarrow \\ c + 3a^2b - \frac{1}{2}a^5 = 0 \end{cases} \quad a = 1,\ b = -1,\ c = +\frac{7}{2}$$

$$f^{-1}(x) = x + (-1)x^3 + \frac{7}{2}x^5 + o(x^5)$$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + (3a^2b + 3ab^2) + (3a^2c + 3ac^2) + (3b^2c + 3bc^2)$

DL de $f \circ g$ $\quad g(0) = 0$

$g(x) = p(x) + o(x^n)$

$f(u) =$

$u = p(x)$

Fin TD 03

Analyse 03 : 2023

le dernier TD