UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTÉ DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ
F È S
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2022/2023
Filière : SMA-SMI
Semestre : S2, Module : Analyse 3

Série TD $n°2$

Exercice 1. *Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+e^x)$.*

1. *Montrer que f est une fonction convexe su $\mathbb{R}$.*
2. *Déduire que $\forall a_k \in \mathbb{R}_*^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$:* $1 + \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \le \prod_{1}^{n}\left(1 + a_k\right)^{1/n}$

Exercice 2. *Soit x un réel strictement positif.*

Taylor lagrange

1. a) *Montrer que* $\left|\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{x^3}{3}$.
   b) *En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.*

   $\ln(1,003) = VA + Erreur$

   $|Erreur| \le 10^{-8}$
2. a) *Montrer que* $\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right| \le \frac{x^5}{5!}$.
   b) *En déduire que* $\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \le \cos(1/2) \le \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$.

Exercice 3. *Soit $f(x) = \log(x+1)$.*

(-K)

1. *Montrer que* $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(x+1)^{k}(k-1)!$.
2. *Donner une valeur approchée à $\log(2)$ à 10^{-3} près.*

Exercice 4. *Soit x un réel strictement positif.*

1. *Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $[0,x]$, avec le reste à l'ordre 5.*
2. *Montrer que* $0 \le ch(x) - 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \le \frac{x^5}{5!} sh(x)$.
3. *Déduire que* $\frac{433}{384} \le ch(1/2) \le \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$.

Exercice 5. 1. *A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$:*

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \le \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

2. *En déduire que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Exo 1

1) $f(x) = \ln(1+e^x)$

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) On a :

$$f\left(\sum_1^n \lambda_K x_K\right) \leq \sum_{K=1}^n \lambda_K f(x_K) \qquad \lambda_K = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + e^{\sum \frac{1}{n} x_K}\right) \leq \sum_{K=1}^n \frac{1}{n} \ln(1+e^{x_K})$$

$$\ln\left(1 + \prod_1^n e^{\frac{1}{n} x_K}\right) \leq \sum_{K=1}^n \ln(1+e^{x_K})^{\frac{1}{n}} \qquad e^x \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 1 + \prod_1^n (e^{x_K})^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{K=1}^n e^{\ln(1+e^{x_K})^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\prod_{K=1}^n e^{x_K}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{K=1}^n (1+e^{x_K})^{\frac{1}{n}}$$

$$x_K = \ln(a_K) \Rightarrow a_K = e^{x_K}$$

d'où
$$\boxed{1 + \left(\prod_{K=1}^n a_K\right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{K=1}^n (1+a_K)^{\frac{1}{n}}}$$

Exo 02

$p, q > 0$, $\underbrace{\frac{1}{p}}^{\lambda_1} + \underbrace{\frac{1}{q}}^{\lambda_2} = 1$

M.q $\forall u, v \geq 0$: $\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq u.v$

Ça revient à montrer que :

$$\ln\left(\frac{U^p}{p}+\frac{V^q}{q}\right) \geq \ln U + \ln V$$

d'où $\lambda_1 \lambda_2$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

$$f\left(\frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2\right) \geq \frac{1}{p}f(x_1) + \frac{1}{q}f(x_2)$$

$$x_1 = u^p, \; x_2 = V^q, \quad \lambda_1 = \frac{1}{p}, \; \lambda_2 = \frac{1}{q}$$

On a $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$

et $p, q > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} \in [0,1], \frac{1}{q} \in [0,1]$

$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}V^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln u^p + \frac{1}{q}\ln V^q$$

$$\ln\left(\frac{1}{p}U^p + \frac{1}{q}V^q\right) \geq \ln U + \ln V = \ln(U.V)$$

22/03/2023

EX 02

Rappel : Th Taylor Lagrange

$\cancel{f(b) = f(a) + x f'(0) + \dots}$ $\exists c \,/\, a < c < b$
$b < c < a$

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Mac Laurin :

$$f(x) = \underbrace{f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3}f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)}_{V.A}$$

$$\underbrace{+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{\text{erreur}}.$$

Donc on a :

Soit $f(x) = \ln(x+1)$ et $n = 2$

on a $\cancel{\text{d'après}}$ $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(c)$

$f(x) = \ln(x+1)$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x+1}$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ $\quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ $\quad f'''(c) = \frac{2}{(c+1)^3}$

$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{6} \frac{2}{(c+1)^3}$

$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{(c+1)^3}$

$\left|\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}\right| = \left|\frac{x^3}{3} \times \frac{1}{(c+1)^3}\right|$

$= \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{(c+1)^3} \leqslant \frac{x^3}{3}$

$c > 0 \Rightarrow (c+1)^3 > 1 \Rightarrow \frac{1}{(c+1)^3} < 1$

b)

$\ln(1{,}003)$ à 10^{-3} près

$\ln(1{,}003) = \ln(1 + 0{,}003)$

$V.A = 3.10^{-3} - \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-6}$

$|\text{erreur}| < \frac{27}{3} 10^{-9} = 9\,10^{-9} \leqslant 10.10^{-9} \leqslant 10^{-8}$

$\boxed{|f(a) - V.A| < \text{erreur}}$

$V.A = 3.10^{-3} - \frac{9}{2} 10^{-6} = 10^{-6}[3.10^{3} - 4{,}5]$

$= 10^{-6}(3000 - 4{,}5) = 10^{-6}.\, 2995{,}5$

$V.A = 0{,}0029955$

2) a) M.q $\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right| \leq \frac{x^5}{5!}$.

Soit
$g(x) = \cos x$ et $n=4$

g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\exists c \in]0,x[$ /.

$$g(x) = g(0) + x g'(0) + \frac{x^2}{2} g''(0) + \frac{x^3}{3!} g^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!} g^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!} g^{(5)}(c)$$

$g(x) = \cos x$ $\quad g(0)=1$ $\quad$, $g^{(4)}(x) = \cos x$

$g'(x) = -\sin x$ $\quad g'(0)=0$ $\quad$, $g^{(5)}(x) = -\sin x$

$g''(x) = \cos x$ $\quad g''(0) = -1$ $\quad$, $g^{(4)}(0) = 1$

$g'''(x) = \sin x$ $\quad g'''(0) = 0$ $\quad$ $g^{(5)}(c) = -\sin c$.

d'où

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\sin c$$

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right| = \left|\frac{-x^5}{5!}\sin c\right|$$

$$= \frac{x^5}{5!}|\sin c| \leq \frac{x^5}{5!} \times 1$$

b) En déduire que: $\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos(\frac{1}{2}) \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$

On a $\quad \left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right| \leq \frac{x^5}{5!}$

d'où

$$-\frac{x^5}{5!} \leq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \leq \frac{x^5}{5!}$$

$$+1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{16 \times 24} - \frac{1}{32 \times 120} \leq \cos(\frac{1}{2}) \leq 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{16 \times 24} + \frac{1}{32 \times 120}$$

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos(\frac{1}{2}) \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

$\boxed{\text{EX}03}$

1. Mq $\forall K \geq 1$ $f^{(K)}(x) = (-1)^{K-1}(x+1)^{-K}(K-1)!$

<u>Par récurrence</u>

- $K=1$ Montrons que : $f'(x) = (-1)^0 (x+1)^{-1} \cdot 0!$

$$= \frac{1}{(x+1)}$$

<u>On a</u> $f(x) = \ln(x+1)$

donc $f'(x) = \frac{1}{x+1}$

- supposons que $f^{(K)}(x) = (-1)^{K-1}(x+1)^{-K}(K-1)!$

et Mq $f^{(K+1)}(x) = (-1)^{K}(x+1)^{-K-1} \cdot K!$

$$f^{(K+1)}(x) = \left(f^{(K)}\right)'(x)$$

$$= (-1)^{K-1}(-K)(x+1)^{-K-1}(K-1)!$$

$$= (-1)^{K-1}(-1)(K)(x+1)^{-K-1}(K-1)!$$

2) V.A de $\ln 2$ à 10^{-3} près

$f(x) = \ln(1+x)$, $x=1$

$$\text{Erreur} = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \right| \qquad 0 < c < 1$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left| (-1)^n \right| (c+1)^{-n-1} n!$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(c+1)^{n+1}} \cdot n!$$

$$\cancel{= \frac{1}{n!(n+1)} \frac{1}{(c+1)^{n+1}} n!}$$ Bravo c'est bien

$$= \frac{1}{n+1} \frac{1}{(c+1)^{n+1}} < \frac{1}{n+1} \leq 10^{-3}$$

d'où $n \geq 999 \Rightarrow \boxed{n = 999}$

$$f(x) = \underset{\text{V.A}}{\underline{\qquad}} + \underset{\text{erreur}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}}$$

Trouvons $n =$

05

d'où $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)}_{V.A} + \frac{x^{1000}}{(1000)!} \times f(c)$

$$\ln 2 = 0 + \sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k!} (-1)^{k-1}(k-1)! + \frac{1}{(10^3)!} f^{(1000)}(c)$$

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{999} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{(1000)!} (-1)^{999} (c+1)^{-1000} (999)!$$

$$= \sum_{k=1}^{999} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{-1}{1000} \frac{1}{(c+1)^{1000}}$$

$\ln 2 = \sum_{k=1}^{999} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est une V.A de $\ln(2)$

avec une erreur $= \left| \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{(c+1)^{1000}} \right| \leq 1$

02/04/2023

Exercice 4

$ch(x)$ $[0, x]$ avec le reste à l'ordre 5.
(Formule de Taylor Lagrange).

$$0 \leq ch(x) - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} \leq \frac{x^5}{5!} sh(x)$$

$f(x) = ch(x)$ est de classe C^∞.

$$\exists c \in [0, x],\ f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(c).$$

$f(x) = ch(x)$, $f(0) = 1$, $f^{(4)}(0) = ch(x)$
$f'(x) = sh(x)$, $f'(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = sh(x)$
$f''(x) = ch(x)$, $f''(0) = 1$, $f^{(6)}(c) = sh(c)$.
$f'''(x) = sh(x)$, $f'''(0) = 0$

On a $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} sh(c) = ch(x)$.

$0 \leq c \leq x$, $0 = sh(0) \leq sh(c) \leq sh(x)$.

$$\frac{x^5}{5!} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^5}{5!} sh(c) \leq \frac{x^5}{5!}$$

$$0 \leq ch(x) - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} \leq \frac{x^5}{5!} sh(x).$$

$x = \frac{1}{2}$:

$$0 \leqslant ch\tfrac{1}{2} - 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{16 \times 24} \leqslant \frac{1}{32 \times 120} sh\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16 \times 24} \leqslant ch\left(\tfrac{1}{2}\right) \leqslant \frac{384 + 48 + 1}{384} + \frac{1}{32 \times 120} sh\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\frac{433}{384} \leqslant ch\left(\tfrac{1}{2}\right) \leqslant \frac{433}{384} + \frac{1}{3840} sh\left(\tfrac{1}{2}\right) \leqslant \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$$

$$\left(\text{car } \boxed{sh\left(\tfrac{1}{2}\right)} = \frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{2} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{2} \leqslant \frac{\sqrt{4}}{2} = \boxed{1}\right)$$

Exo 5

1) Taylor Lagrange avec reste intégral.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x \rightsquigarrow f^{(k)}(0) = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt.$$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \right|$$

On multiplie par une chose β.

si $x > 0$ $\quad 0 \leqslant t \leqslant x$

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \right| = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \geqslant 0$$

$x > 0$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t \leqslant \frac{1}{n!} e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

$$(t \leqslant x \rightsquigarrow e^t \leqslant e^x)$$

$$\int_0^x (x-t)^n e^t \leqslant \int_0^x (x-t)^n e^x \, dt = e^x \int_0^x (x-t)^n \, dt$$

$$= e^x \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)}.$$

si $x < 0$ $\quad x \leqslant t \leqslant 0$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \right|$$

$$= \left| + \int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \right| \leqslant \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} e^t \, dt$$

$$\leqslant \int_0^x \frac{|x-t|}{n!} \, dt$$

$x \leqslant t \leqslant 0$, $\displaystyle\int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!} \, dt = \int_x^0 \frac{-(x-t)^n}{n!} \, dt$

$\boxed{\text{si } f \leqslant g \ \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt \quad \text{si } a < b}$

$$= \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} \, dt = \frac{1}{n!} \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} \right]_x^0$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

on a montré $\left| e^x - \sum_0^n \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{n+1} |x|^{n+1} \times 1 \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$

$(\text{car } |x| \geq 0 \Rightarrow e^{|x|} \geq 1)$

2) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{x} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

On a $\displaystyle 0 \leqslant e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$

Il reste à montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!} = 0$$

$\exists N$,

$\frac{|x|}{N} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow N > 2|x|$, $N = E(2|x|) + 1$

si $n > N > 2|x| \Rightarrow \frac{|x|}{n} < \frac{1}{2}$

$n > N$

$$0 \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \left(\frac{|x|}{n+1} \cdot \frac{|x|}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{|x|}{N} \right) \times \underbrace{\left(\frac{|x|}{N-1} \times \ldots \times \frac{|x|}{1} \right)}_{A}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \right) \cdot A \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-N+1} \times A$$

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} q^n = 0 \ (-1 < q < 1$

Alors $\displaystyle 0 \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N+2} \times A e^{|x|}$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0 \qquad 0$

Fin TD 02