Devoir numero 1: Nombres Réels et Topologie sur $\mathbb{R}$.

Dr. DIA et Mr. Baldé

Exercice 1 (2 pts)

1- Montrer que le nombre $x = -22,14333333333333\ldots\ldots$ *est un nombre rationnel et donner une approximation de* x *à* 10^5 *prés.*

2- Montrer que le nombre d'Euler $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ *est un nombre irrationnel.*

3- Montrer que $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Exercice 2 (2.5)

Soient A *et* B *deux parties de* $\mathbb{R}$ *non vides et majorées.*

1. *Montrer que si* $A \subset B$ *alors* $\inf A \geq \inf B$.
2. *Montrer que* $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup(A \cup B)$.
3. *Si* A *est borné montrer que* $\inf(-A) = -sup(A)$.
4. *Soit* $F = [0;5[$ *et* $G = [2;+\infty[$.
   a. *Déterminer* $\sup$ *et* $\inf$ *de* F *et* G *en cas d'existence dans* $\mathbb{R}$.
   b. *Déterminer* $F \cap G$. *Donner la frontière de* $F \cap G$.

Exercice 3 (2 pts)

Soient a, b *deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, inférieures.*

1. $X_n = \{1 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$

2. $Y_n = \{1 + (-1)^n 4;\ n \in \mathbb{N}\}$

3. $Z_n = \left\{a + \frac{b}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

4. $W_n = \left\{a + (-1)^n \frac{b}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 4 (2 pts)

1. *Soit* $F = [-1, +1]$.
   a. *Montrer que* F *est fermé.*
   b. *Préciser son intérieur, son adhérence et sa frontière.*
2. *Soient A,B deux parties non vides de* $\mathbb{R}$. *On suppose* $A \subset B$. *Démontrer que* $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
3. *Les ensembles sont ils des ouverts ou fermés ? donner leur intérieur*

   1.$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *et* $\emptyset$, **2.** $\{0\},]0;2],]-\infty, -3]$

Exercice 5 (1.5 pts)

Montrer que les ensembles $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *sont denses dans* $\mathbb{R}$.