Lycée: Tahar Sfar Sousse	Série : Intégrales + Correction	Niveau :4 Maths
Année scolaire : 2025/2026		**Prof : Kamel Maatallah**

Exercice n 1

Montrer que la fonction $x \mapsto x\cos(x)$ est une primitive, sur $\mathbb{R}$, de la fonction $x \mapsto \cos(x) - x\sin(x)$.
Calculer $\int_0^{\pi} (\cos(x) - x\sin(x))\, dx$.

Solution
$x \mapsto x\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \cos(x) - x\sin(x)$.
$\int_0^{\pi} (\cos(x) - x\sin(x))\, dx = [x\cos(x)]_0^{\pi} = \boxed{-\pi}$.

Exercice n 2

Calculer $\int_0^1 (1-x)\sqrt{x}\, dx$.

Solution
$\int_0^1 (1-x)\sqrt{x}\, dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{4}{15}}$.

Exercice n 3

Calculer $\int_0^1 \frac{7x^2}{(x^3+2)^2}\, dx$.

Solution
$I = \int_0^1 \frac{7x^2}{(x^3+2)^2}\, dx$. On pose $u(x) = x^3 + 2$ donc $u'(x) = 3x^2$.
$I = \int_0^1 \frac{7}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)^2}\, dx = \frac{7}{3}\left[-\frac{1}{u(x)}\right]_0^1 = \frac{7}{3}\left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \boxed{\frac{7}{18}}$.

Exercice n 4

Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\, dx$.

Solution
On pose $u(x) = x^3 + 2$ donc $u'(x) = 3x^2$.
$I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} \times u'(x) u(x)^{-\frac{1}{4}}\right) dx = \frac{1}{3}\left[\frac{u(x)^{1-\frac{1}{4}}}{1-\frac{1}{4}}\right]_0^1$
$I = \frac{4}{9}\left[u(x)^{\frac{3}{4}}\right]_0^1$ donc $\boxed{I = \frac{4}{9}(\sqrt[4]{27} - \sqrt[4]{8})}$.

Exercice n 5

Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+1}{(x-1)^5}\,dx$.

Solution
Pour tout x appartenant à $[2,3]$,

$$\frac{x+1}{(x-1)^5}=\frac{(x-1)+2}{(x-1)^5}=\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{2}{(x-1)^5}=(x-1)^{-4}+2(x-1)^{-5}.$$

$\displaystyle\int_2^3\left((x-1)^{-4}+2(x-1)^{-5}\right)dx=\left[\frac{(x-1)^{-3}}{-3}+2\frac{(x-1)^{-4}}{-4}\right]_2^3$
$=\left[-\frac{1}{3(x-1)^3}-\frac{1}{2(x-1)^4}\right]_2^3=\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{32}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$
$=-\frac{7}{96}+\frac{5}{6}=\frac{-7+80}{96}=\boxed{\dfrac{73}{96}}.$

Exercice n 6

Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\cos^3(x)\,dx$.

Solution
$\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\cos^3(x)\,dx=\left[-\frac{1}{4}\cos^4(x)\right]_0^\pi=-\frac{1}{4}\left((-1)^4-1^4\right)=\boxed{0}.$

Exercice n 7

Calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos^3(x)\,dx$.

Solution
$\displaystyle\int\cos^3(x)dx=\int\cos(x)\cos^2(x)dx=\int\cos(x)(1-\sin^2(x))dx=\sin(x)-\frac{1}{3}\sin^3(x).$
$\displaystyle\left[\sin(x)-\frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_{\pi/6}^{\pi/3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$
$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{24}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{11}{24}=\boxed{\dfrac{9\sqrt{3}-11}{24}}.$

Exercice n 8

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\sin^2(x)\cos^5(x)\,dx$.

Solution
On écrit $\sin^2(x)\cos^5(x)=\sin^2(x)(1-\sin^2(x))^2\cos(x)=(\sin^2(x)-2\sin^4(x)+\sin^6(x))\cos(x)$.
Primitive : $\frac{1}{3}\sin^3(x)-\frac{2}{5}\sin^5(x)+\frac{1}{7}\sin^7(x)$.

Avec $\sin(\pi/6)=1/2$, le résultat est $\frac{1}{3(8)}-\frac{2}{5(32)}+\frac{1}{7(128)}=\frac{1}{24}-\frac{1}{80}+\frac{1}{896}$. $\boxed{I=\dfrac{407}{13440}}$.

Exercice n 9

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\cos^2(x)\,dx$.

Solution

On linéarise : $\cos^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

$$\int_0^{\pi/3}\frac{1+\cos(2x)}{2}dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/3}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sin(2\pi/3)}{4}=\boxed{\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}}.$$

Exercice n 10

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\cos^4(x)\,dx$.

Solution

On utilise la formule d'Euler ou la linéarisation successives :

$\cos^4(x)=(\cos^2(x))^2=\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x))$

$\cos^4(x)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)$.

$$\int_0^{\pi/3}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)\right)dx=\left[\frac{3x}{8}+\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{\sin(4x)}{32}\right]_0^{\pi/3}$$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{-\sqrt{3}/2}{32}=\boxed{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{7\sqrt{3}}{64}}$.

Exercice n 11

On pose $I=\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}dx$ et $J=\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{\cos x}{\sin x-\cos x}dx$.

1) Calculer $I+J$.
2) Calculer $I-J$.
3) En déduire I et J.

Solution

1) $I+J=\displaystyle\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx$. Le numérateur est la dérivée de $\sin x-\cos x-\textit{constant}$? Non, $(-\cos x-\sin x)=-(\cos x+\sin x)$ est la dérivée de $(\cos x-\sin x)$. Si $u=\sin x-\cos x$, $u'=\cos x+\sin x$. Donc $I+J=[\ln|\sin x-\cos x|]_{\pi/3}^{2\pi/3}=\boxed{\ln(2+\sqrt{3})}$.

2) $I-J=\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x-\cos x}dx=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}1\,dx=\boxed{\frac{\pi}{3}}$.

3) $I=\frac{1}{2}((I+J)+(I-J))=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$ et $J=\frac{1}{2}((I+J)-(I-J))=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$.

Exercice n 12

Calculer $\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx$.

Solution
On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{-\cos(2x)}{2}$.
On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sin(2x)$.

$$\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx = \left[-x\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(2x)}{2}\,dx$$

$$\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^{\pi} = \boxed{-\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice n 13

On pose $I = \int_0^{\pi} x^2\cos^2(x)\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} x^2\sin^2(x)\,dx$.

1) Calculer $I+J$. 2) Calculer $I-J$. 3) En déduire I et J.

Solution

1) $I+J = \int_0^{\pi} x^2(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx = \int_0^{\pi} x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$.

2) $I-J = \int_0^{\pi} x^2(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int_0^{\pi} x^2\cos(2x)\,dx$.

Double Intégration par parties sur $\int_0^{\pi} x^2\cos(2x)dx$:

$\int_0^{\pi} x^2\cos(2x)dx = [x^2\frac{\sin(2x)}{2}]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x\sin(2x)dx = -\int_0^{\pi} x\sin(2x)dx = [x\frac{\cos(2x)}{2}]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(2x)}{2}dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}[\frac{\sin(2x)}{2}]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

3) $I = \frac{1}{2}(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2})$ et $J = \frac{1}{2}(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2})$.

Exercice n 14

Encadrer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$.

Solution
Sur $[0,1]$, $1 \le 1+t+t^2 \le 3$. Donc $1/3 \le \frac{1}{1+t+t^2} \le 1$. Intégration sur $[0,1]$ donne $1/3 \le I \le 1$.

Exercice n 15

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}dt$.

1) Montrer que, pour tout $x>0$,

$$\left|f(x)-\frac{1}{2x}\right|=\left|\int_x^{2x}\frac{-t^2-1}{t^2\sqrt{t^4+t^2+1}(t^2+\sqrt{t^4+t^2+1})}dt\right|.$$

2) Montrer que, pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\left|f(x)-\frac{1}{2x}\right|\leq\frac{7}{24x^3}$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=\frac{1}{2}$.

Solution

1) Pour tout $x>0$, $\left|f(x)-\frac{1}{2x}\right|=\left|\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t^2}dt\right|$.
$=\left|\int_x^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}-\frac{1}{t^2}\right)dt\right|=\left|\int_x^{2x}\frac{t^2-\sqrt{t^4+t^2+1}}{t^2\sqrt{t^4+t^2+1}}dt\right|=\left|\int_x^{2x}\frac{t^4-(t^4+t^2+1)}{t^2\sqrt{t^4+t^2+1}(t^2+\sqrt{t^4+t^2+1})}dt\right|=\left|\int_x^{2x}\frac{-t^2-1}{t^2\sqrt{t^4+t^2+1}(t^2+\sqrt{t^4+t^2+1})}dt\right|$.

2) On en déduit que, pour tout $x>0$, $\left|f(x)-\frac{1}{2x}\right|\leq\int_x^{2x}\frac{t^2+1}{t^2\sqrt{t^4+t^2+1}(t^2+\sqrt{t^4+t^2+1})}dt$. Or, $\sqrt{t^4+t^2+1}\geq t^2$, $t^2+\sqrt{t^4+t^2+1}\geq 2t^2$ d'où $\int_x^{2x}\frac{t^2+1}{t^2\sqrt{t^4+t^2+1}(t^2+\sqrt{t^4+t^2+1})}dt\leq\int_x^{2x}\frac{t^2+1}{2t^6}dt$. En prenant $x\geq1$, nous avons, pour $t\in[x,2x]$, $\frac{t^2+1}{2t^6}\leq\frac{1}{t^4}$. En intégrant sur $[x,2x]$, on obtient $\int_x^{2x}\frac{t^2+1}{2t^6}dt\leq\int_x^{2x}\frac{1}{t^4}dt$. Finalement, pour tout $x\geq1$, on a $\left|f(x)-\frac{1}{2x}\right|\leq\frac{7}{24x^3}$ ou $\left|xf(x)-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{7}{24x^2}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=\frac{1}{2}$.

Exercice n 16

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx$.

1) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Que peut-on en déduire ?

2) Montrer que $1-\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq1$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution

1) Pour tout x appartenant à $[0,1]$, $x^{n+1}\leq x^n$ donc $1+x^{n+1}\leq1+x^n$. On en déduit que $\frac{1}{1+x^{n+1}}\geq\frac{1}{1+x^n}$. En intégrant sur $[0,1]$, on obtient $\int_0^1\frac{1}{1+x^{n+1}}dx\geq\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx$ soit $I_{n+1}\geq I_n$. On en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'autre part, $0\leq x^n\leq1$ donc $1\leq1+x^n\leq2$ d'où $\frac{1}{1+x^n}\leq1$ et en intégrant sur $[0,1]$, $\frac{1}{2}\leq I_n\leq1$ (1). $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, donc elle

est convergente.

2) Pour tout x appartenant à $[0,1]$,

$$\frac{1}{1+x^n}=\frac{1+x^n-x^n}{1+x^n}=1-\frac{x^n}{1+x^n}$$

$x^n+1\geq 1$ d'où $\frac{1}{x^n+1}\leq 1$ soit $-\frac{x^n}{x^n+1}\geq -x^n$ et $1-\frac{x^n}{1+x^n}\geq 1-x^n$. En intégrant sur $[0,1]$, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \geq \int_0^1 (1-x^n)dx$ d'où

$$I_n \geq 1-\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Longrightarrow I_n \geq 1-\frac{1}{n+1}$$

À l'aide de (1), on obtient $1-\frac{1}{n+1}\leq I_n \leq 1$. En utilisant le théorème des gendarmes, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1}$.

Exercice n 17

Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\tan(x)dx.$$

Solution

Pour tout x appartenant à $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\tan(0)\leq\tan(x)\leq\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $0\leq\tan(x)\leq 1$ d'où $0\leq x^n\tan(x)\leq x^n$. En intégrant sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on obtient $0\leq\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\tan(x)dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$ soit

$$0\leq I_n\leq\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad 0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\right]=0$ (car $0<\frac{\pi}{4}<1$). donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Exercice n 18

On pose, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0,1]$,

$$1-x+x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$

2) En déduire que $u_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

3) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution

1) Pour tout x appartenant à $[0,1]$,

$$1-x+x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1} = 1+(-x)+(-x)^2+\cdots+(-x)^{n-1}.$$

C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Donc $1-x+x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$.

2) En intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}\right) dx.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = [\ln(1+x)]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

En posant $j = k+1$, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = u_n$ (car $(-1)^{j-1} = (-1)^{j+1}$).

D'où $u_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. (1)

3) $\left|(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx\right| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. $0 \leq x \leq 1$ implique $1 \leq 1+x \leq 2$ d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ et $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$. En intégrant sur $[0,1]$, on a $\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, en utilisant le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$$

En reprenant l'égalité (1), on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)}$.

Exercice n 19

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé (unité 2 cm). Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto 2x^2 - 13x + 23$ et $g : x \mapsto x + 3$. Calculer l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 2, x = 5$ et les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$.

Solution
Pour tout réel $x, f(x) - g(x) = 2x^2 - 13x + 23 - (x+3)$

$$f(x) - g(x) = 2(x^2 - 7x + 10) = 2(x-2)(x-5).$$

On en déduit que, sur $]-\infty,2[\cup]5,+\infty[$, C_f est au-dessus de C_g, sur $]2,5[$, C_f est en dessous de C_g et les points d'intersection sont $A(2,5)$ et $B(5,8)$. L'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, du domaine est donc

$$\int_2^5 (g(x) - f(x))dx = \int_2^5 -2(x^2 - 7x + 10)dx = -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x\right]_2^5.$$

$\mathscr{A} = 9$ u.a ou $\boxed{\mathscr{A} = 36 \text{ cm}^2}$.

Exercice n 20

Calculer la valeur moyenne sur $[1,4]$ de la fonction $x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$.

Solution
La valeur moyenne sur $[1,4]$ de la fonction $x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$ est :

$$\overline{f} = \frac{1}{4-1}\int_1^4 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{2} \times 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\overline{f} = \frac{1}{6}\left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{9}\left[(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right]_1^4$$

$$\overline{f} = \frac{1}{9}\left(17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}\right) = \boxed{\frac{17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}}{9}}.$$

Exercice n 21

Supposons que la vitesse v d'un point mobile M soit une fonction continue du temps t. Montrer que la valeur moyenne de la fonction v sur $[t_0,t_1]$ est la vitesse moyenne du point sur l'intervalle $[t_0,t_1]$.

Solution
La valeur moyenne de la fonction v sur $[t_0,t_1]$ est $\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$. Or v est la vitesse instantanée, donc $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ où x désigne la fonction position du mobile. Ainsi,

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \frac{1}{t_1 - t_0}[x(t)]_{t_0}^{t_1} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Cette dernière expression est bien la définition de la vitesse moyenne du point sur l'intervalle $[t_0,t_1]$.

Exercice n 22

Un météorologiste estime que la température, en °C, d'une froide journée d'hiver en fonction de l'heure suit l'équation :

$$T = \frac{1}{36}t(t-12)(t-24)-18$$

où t est le temps, en heures et $t=0$ correspond à minuit. Quelle est la température moyenne entre 6 heures du matin et midi ?

Solution

La température moyenne entre 6 heures du matin ($t=6$) et midi ($t=12$) est :

$$T_m = \frac{1}{12-6}\int_6^{12}\left[\frac{1}{36}t(t-12)(t-24)-18\right]dt = \frac{1}{216}\int_6^{12}\left[t^3-36t^2+288t-648\right]dt$$

$$T_m = \frac{1}{216}\left[\frac{t^4}{4}-12t^3+144t^2-648t\right]_6^{12} = -\frac{15}{2}$$

La température moyenne est de $\boxed{-7.5°\mathrm{C}}$.

Exercice n 23

Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$ et, pour tout $x\in[0,1]$, $0\leq f'(x)\leq 1$.

1) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x)=\int_0^x (f(t))^3dt-\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$. Calculer $\varphi'(x)$, puis montrer que, sur $[0,1]$, $\varphi'(x)$ a le même signe que $(f(x))^2-2\int_0^x f(t)dt$.

2) Déterminer le signe de $(f(x))^2-2\int_0^x f(t)dt$. En déduire que $\int_0^1 (f(t))^3dt \leq \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2$.

Solution

1) Pour tout x appartenant à $[0,1]$, on a :

$$\varphi'(x) = (f(x))^3-2f(x)\int_0^x f(t)dt = \boxed{f(x)\left[(f(x))^2-2\int_0^x f(t)dt\right]}.$$

f est croissante sur $[0,1]$ car $0\leq f'(x)\leq 1$ donc $x\geq 0$ implique $f(x)\geq f(0)$ soit $f(x)\geq 0$. Donc $\varphi'(x)$ a le même signe que $(f(x))^2-2\int_0^x f(t)dt$.

2) Pour tout x appartenant à $[0,1]$, on pose :

$$\phi(x) = (f(x))^2-2\int_0^x f(t)dt.$$

On a $\phi'(x)=2f(x)f'(x)-2f(x)=2f(x)(f'(x)-1)$. Pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)\geq 0$ et $f'(x)-1\leq 0$ donc $\phi'(x)\leq 0$. ϕ est décroissante sur $[0,1]$. $x\geq 0$ implique $\phi(x)\leq\phi(0)$ soit $\phi(x)\leq 0$. On en déduit que $\varphi'(x)\leq 0$ et donc que φ est décroissante sur $[0,1]$. Pour tout $x\in[0,1]$, $\varphi(x)\leq\varphi(0)$

soit $\varphi(x) \leq 0$. On en déduit que : pour tout $x \in [0,1]$, $\int_0^x (f(t))^3 dt \leq \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$ donc en particulier

$$\boxed{\int_0^1 (f(t))^3 dt \leq \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2}.$$

Exercice n 24

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ et g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g = f \circ \tan$.

1) Déterminer $g'(x)$ puis $g(x)$.

2) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$.

Solution

1) $\tan$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $g = f \circ \tan$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. D'autre part, $(f \circ \tan)' = (f' \circ \tan)\tan'$ d'où, pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} \times (1+\tan^2(x)) = 1.$$

On en déduit que $g(x) = x + \lambda$ où λ est une constante réelle. Or, $g(0) = f(\tan(0)) = f(0) = 0$ donc $\boxed{g(x) = x}$.

2) En écrivant $g(x) = f(\tan(x))$, on a $\int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}dt = x$. En remplaçant x par $\frac{\pi}{4}$, on a $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}}$.

Exercice n 25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4}dt$.

1) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Montrer que f est dérivable puis calculer $f'(x)$.

3) Déterminer le sens de variation de f.

Solution

1) Soit $x \geq 0$. Pour tout $t \in [0,x^2]$, $t^4+1 \geq 1$ donc $\sqrt{t^4+1} \geq 1$ d'où, en intégrant sur $[0,x^2]$,

$\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}dt \geq x^2$. Comme $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, on a $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.
f est une fonction paire donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\int_0^{x}\sqrt{1+t^4}dt$ et v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=x^2$. On a $f=u\circ v$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'=(u'\circ v)\times v'$ soit, pour tout réel x, $\boxed{f'(x)=2x\sqrt{1+x^8}}$.

3) f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$.

Exercice n 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_{x^2}^{2x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$.

2) Déterminer le sens de variation de f.

3) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Solution

1) La fonction $u: x\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Notons F une primitive de u sur $\mathbb{R}$. On a :

$$f(x)=[F(t)]_{x^2}^{2x^2}=F(2x^2)-F(x^2).$$

$x\mapsto 2x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x\mapsto F(2x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De même, $x\mapsto F(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$f'(x)=4xu(2x^2)-2xu(x^2)=\frac{4x}{\sqrt{1+4x^4+16x^8}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^4+x^8}}.$$

$$\boxed{f'(x)=2x\left(\frac{2}{\sqrt{1+4x^4+16x^8}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^4+x^8}}\right)}.$$

2) Déterminons le signe de la dérivée.

$$\frac{2}{\sqrt{1+4x^4+16x^8}}>\frac{1}{\sqrt{1+x^4+x^8}} \iff \left(4\left(1+x^4+x^8\right)>1+4x^4+16x^8\right).$$
$$\frac{2}{\sqrt{1+4x^4+16x^8}}>\frac{1}{\sqrt{1+x^4+x^8}} \iff (3-12x^8>0).$$
$$\frac{2}{\sqrt{1+4x^4+16x^8}}>\frac{1}{\sqrt{1+x^4+x^8}} \iff \left(3\left(1+2x^4\right)\left(1-2x^4\right)>0\right).$$
$$\frac{2}{\sqrt{1+4x^4+16x^8}}>\frac{1}{\sqrt{1+x^4+x^8}} \iff \left(\left(1-\sqrt{2}x^2\right)\left(1+\sqrt{2}x^2\right)>0\right).$$
$$\frac{2}{\sqrt{1+4x^4+16x^8}}>\frac{1}{\sqrt{1+x^4+x^8}} \iff \left(1-\sqrt{2}x^2>0\right).$$

Racines : $-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$		0		$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$1-\sqrt{2}x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement, f est croissante sur $\left]-\infty,-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right]$ et sur $\left[0,\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right]$ et f est décroissante sur $\left[-\sqrt[4]{\frac{1}{2}},0\right]$ et sur $\left[\sqrt[4]{\frac{1}{2}},+\infty\right[$.

3) On a $t^4 \leq 1+t^2+t^4$ donc $0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \frac{1}{t^2}$. En intégrant sur $[x^2,2x^2]$ (si $x^2>0$, i.e. $x \neq 0$), on a

$$0 \leq \int_{x^2}^{2x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_{x^2}^{2x^2} = -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x^2}.$$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x^2}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$. (f est une fonction paire).

Exercice n 27

Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine délimité par la courbe représentative de $x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$ et les droites d'équation $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

Solution

Le volume est donné par $V = \displaystyle\int_0^1 \pi(f(x))^2dx$.

$$V = \int_0^1 \pi\left(x\sqrt{x^2+1}\right)^2dx = \pi\int_0^1 x^2(x^2+1)dx = \pi\int_0^1 (x^4+x^2)dx.$$

$$V = \pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \pi\left(\frac{3+5}{15}\right) = \boxed{\frac{8\pi}{15}}.$$

Exercice n 28

On appelle intensité efficace, I_E, d'un courant alternatif l'intensité d'un courant continu qui produirait à travers la même résistance R le même effet calorifique. Sachant que $I(t) = I_{Max}\sin(\omega t)$ est l'intensité à l'instant t du courant alternatif, déterminer I_E en fonction de I_{Max}. La période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$. L'effet calorifique moyen sur une période correspond à l'intégrale de RI^2 divisée par T. La loi de Joule donne $RI_E^2T = \int_0^T RI^2(t)dt$.

Solution

$$RI_E^2 T = \int_0^T RI_{Max}^2 \sin^2(\omega t)dt \implies I_E^2 = \frac{I_{Max}^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt.$$

On linéarise $\sin^2(\omega t) = \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}$.

$$I_E^2 = \frac{I_{Max}^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt = \frac{I_{Max}^2}{2T}\left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^T.$$

Sachant que $\omega T = 2\pi$, $\sin(2\omega T) = \sin(4\pi) = 0$.

$$I_E^2 = \frac{I_{Max}^2}{2T}(T-0) = \frac{I_{Max}^2}{2}.$$

On en déduit $\boxed{I_E = \frac{I_{Max}}{\sqrt{2}}}$.

Exercice n 30

Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Solution

Pour tout $x > 0$ et pour tout t appartenant à $[x, x+1]$, on a :

$$\sqrt{x} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{x+1} \implies 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{t} \leq 2\sqrt{x+1}$$

$$\implies \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à t sur $[x, x+1]$:

$$\int_x^{x+1} \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dt \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{2\sqrt{x}}dt$$

Les termes extrêmes sont constants par rapport à t, l'intervalle a une longueur de 1.

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \left[\sqrt{t}\right]_x^{x+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

Exercice n 31

On pose $u_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^n}dx$.

1) Montrer que, pour tout x de $[0,1]$, $1-x^n \leq \sqrt{1-x^n} \leq 1-\frac{x^n}{2}$.

2) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1) $0 \leq x \leq 1$ donne $0 \leq x^n \leq 1$ et $0 \leq 1-x^n \leq 1$. On sait que si $a \in [0,1]$, $a \leq \sqrt{a}$, d'où $1-x^n \leq \sqrt{1-x^n}$. D'autre part, $\left(1-\frac{x^n}{2}\right)^2 = 1-x^n+\frac{x^{2n}}{4} \geq 1-x^n \geq 0$.
Donc $\sqrt{1-x^n} \leq \sqrt{\left(1-\frac{x^n}{2}\right)^2} = 1-\frac{x^n}{2}$ (car $1-\frac{x^n}{2} \geq \frac{1}{2} > 0$). D'où $\boxed{1-x^n \leq \sqrt{1-x^n} \leq 1-\frac{x^n}{2}}$.

2) En intégrant sur $[0,1]$, on obtient : $\int_0^1 (1-x^n)dx \leq u_n \leq \int_0^1 \left(1-\frac{x^n}{2}\right)dx$. $\left[x-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq u_n \leq \left[x-\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1$. $1-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1-\frac{1}{2(n+1)}$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{2(n+1)} = 1$, en utilisant le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

Exercice n 32

On pose $u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n$.

Solution
Pour $n \leq x \leq n+1$, on a $n^4 \leq x^4 \leq (n+1)^4$, donc $n^4+1 \leq x^4+1$. $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$. En intégrant sur $[n,n+1]$ (intervalle de longueur 1), on a : $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^4+1}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$. Les membres extrêmes tendent vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.
On reprend l'encadrement en multipliant par n^2 : $\frac{n^2}{\sqrt{(n+1)^4+1}} \leq n^2 u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$. On a $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{n^2}{n^2\sqrt{1+1/n^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^4}} \to 1$ quand $n \to +\infty$. De même pour le terme de gauche. D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1}$.

Exercice n 33

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)dx$.

1) Calculer u_0 et u_1.

2) Calculer $u_n + u_{n+2}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) Montrer, par récurrence, que $u_{2n} = (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right]$.

4) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$.

Solution

1) $u_0 = \int_0^{\pi/4} 1dx = \boxed{\frac{\pi}{4}}$. $u_1 = \int_0^{\pi/4} \tan(x)dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}$.

2) $u_n + u_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n x(1+\tan^2 x)dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{1}{n+1}}$. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \implies 0 \leq \tan x \leq 1$.

Donc $0 \leq u_{n+2} \leq u_n$. Ainsi $\frac{1}{n+1} = u_n + u_{n+2} \geq u_n$, donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme,$\lim \frac{1}{n+1} = 0$, ainsi $\boxed{\lim u_n = 0}$.

3) Notons $P(n)$ la proposition : « $u_{2n} = (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right]$ ».

D'après la question précédente, $u_2 + u_0 = 1$. Or $u_0 = \frac{\pi}{4}$ donc $u_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

De plus, $(-1)^1 \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right] = -\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

On en déduit que $P(1)$ est vraie.

Supposons que, pour un entier naturel n, $P(n)$ soit vraie. D'après la question précédente, $u_{2(n+1)} + u_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ donc

$$u_{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \left[(-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)\right]$$

$$u_{2n+2} = (-1)^{n+1} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} + \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right) = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right).$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Donc , pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

4) $u_{2n} = (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right]$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = (-1)^{n+1} u_{2n} + \frac{\pi}{4}$.

$\left|(-1)^{n+1} u_{2n}\right| = u_{2n}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}}$.

Exercice n 34

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel non nul n, $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+5}I_n$.

3) Montrer, par récurrence, que $I_n=\frac{2^{2n+2}(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!}$.

Solution

1) $I_0=\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1$ donc $\boxed{I_0=\dfrac{2}{3}}$. Pour calculer I_1, on procède à une intégration par parties :

$$I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=\left[x\left(-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right)\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

$$I_1=\frac{2}{3}\left[-\frac{2}{5}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 \text{ donc } \boxed{I_1=\frac{4}{15}}.$$

2) $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties, on a :

$$I_{n+1}=\left[x^{n+1}\left(-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right)\right]_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n\left(-\frac{2}{3}\right)(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

$$I_{n+1}=\frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 x^n(1-x)\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

$$I_{n+1}=\frac{2}{3}(n+1)\left(\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x\right).$$

$$I_{n+1}=\frac{2}{3}(n+1)(I_n-I_{n+1}). \text{ Ainsi, } \boxed{I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+5}I_n}.$$

3) Notons, pour tout entier naturel n, $P(n)$ la proposition : $\ll I_n=\frac{2^{2n+2}(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!}\gg$. $I_0=\frac{2}{3}$ donc $P(0)$ est vraie. Soit n un entier naturel. Supposons $P(n)$ vraie.

$$I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+5}I_n \text{ (question précédente).}$$

$$I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+5}\times\frac{2^{2n+2}(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!} \text{ (hypothèse de récurrence).}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par $(2n+4)=2(n+2)$.

$$I_{n+1}=\frac{2^{2n+4}(n+2)((n+1)!)^2}{(2n+5)!}. \text{ Ainsi, } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice n 35

On pose, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p,0} = \int_0^1 t^p\,dt$ et, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $I_{0,q} = \int_0^1 (1-t)^q\,dt$.

1) Montrer que, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a $I_{p+1,q} = \dfrac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
Montrer que $I_{p,q} - I_{p,q+1} = I_{p+1,q}$, puis que $I_{p,q+1} = \dfrac{q+1}{p+q+2} I_{p,q}$.

2) Démontrer, par récurrence sur q, p étant fixé, que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad I_{p,q} = \frac{q!p!}{(p+q+1)!}.$$

3) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p \int_0^1 t^p(1-t)^{n-p}\,dt$.

Solution

1) Les conditions d'intégrations par parties sont remplies (fonctions polynômes continues). Soit $I_{p+1,q} = \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^q dt$. Posons : $\begin{cases} u'(t) = (1-t)^q \\ v(t) = t^{p+1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{q+1}(1-t)^{q+1} \\ v'(t) = (p+1)t^p \end{cases}$.

$$I_{p+1,q} = \left[-t^{p+1} \frac{(1-t)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 + \frac{p+1}{q+1} \int_0^1 t^p(1-t)^{q+1}dt.$$

Le terme entre crochets est nul en 1 et en 0. On obtient donc :

$$\boxed{I_{p+1,q} = \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} I_{p,q} - I_{p,q+1} &= \int_0^1 t^p(1-t)^q dt - \int_0^1 t^p(1-t)^{q+1} dt \\ &= \int_0^1 t^p(1-t)^q[1-(1-t)]dt = \int_0^1 t^p(1-t)^q[t]dt \\ &= \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^q dt = I_{p+1,q}. \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant $I_{p+1,q}$ par l'expression trouvée avec l'intégration par parties :

$$I_{p,q} - I_{p,q+1} = \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1} \Longrightarrow I_{p,q} = I_{p,q+1}\left(1 + \frac{p+1}{q+1}\right)$$

$$I_{p,q} = I_{p,q+1}\left(\frac{q+1+p+1}{q+1}\right) \Longrightarrow \boxed{I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+q+2} I_{p,q}}.$$

2) Pour p fixé. Notons $P(q)$ la proposition « $I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$ ».

$(q=0)$: On a $I_{p,0} = \displaystyle\int_0^1 t^p dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$. La formule donne $\frac{p!0!}{(p+0+1)!} = \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}$. Donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(q)$ vraie pour un entier naturel q. D'après la question 1, on a : $I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+q+2} I_{p,q}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+q+2} \times \frac{p!q!}{(p+q+1)!} = \frac{p![(q+1)q!]}{(p+q+2)(p+q+1)!} = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!}.$$

La formule est vérifiée au rang $q+1$.

Conclusion : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3) Première méthode (Utilisation de la linéarité) :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \int_0^1 t^p (1-t)^{n-p} dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n} C_n^p t^p (1-t)^{n-p} dt$$

D'après la formule du binôme de Newton : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p t^p (1-t)^{n-p} = (t+1-t)^n = 1^n = 1$. Donc la somme vaut $\displaystyle\int_0^1 1dt = 1$.

Deuxième méthode (Utilisation de la question 2) :

$$S = \sum_{p=0}^{n} C_n^p I_{p,n-p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!(n-p)!}{(p+n-p+1)!}$$

$$S = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!(n-p)!}{(n+1)!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n+1}$$

Il y a $n+1$ termes dans la somme, tous égaux à $\frac{1}{n+1}$, donc :

$$S = (n+1) \times \frac{1}{n+1} = \boxed{1}.$$

Exercice n 36

1) Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2) Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F.

Pour tout réel x, on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

3) Montrer que F est impaire.

4) Montrer que, pour tout $x\geq 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Pour tout réel x, on pose $G(x)=F(2x)-F(x)$.

5) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de G.

6) Montrer que, pour tout $x>0$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{1}{x}$. En déduire que, pour tout réel x, $G(x)\leq\ln(2)$.

Solution

1) $x\mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par conséquent, continue sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Pour tout réel } x,\ f'(x)=-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

$f'(0)=0$, pour tout $x>0$, $f'(x)<0$ et pour tout $x<0$, $f'(x)>0$. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$. Pour tout réel x, $x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 1$ et $\boxed{0<f(x)\leq 1}$.

2) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout réel x, f est continue sur l'intervalle d'extrémités 0 et x. F est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F'=f}$. f étant strictement positive, on en déduit que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout réel x, $(F(-x))'=-F'(-x)=-f(-x)=-f(x)$. D'autre part, $(-F(x))'=-F'(x)=-f(x)$. Les fonctions $x\mapsto F(-x)$ et $x\mapsto -F(x)$ ont la même dérivée, elles diffèrent donc d'une constante λ. Pour tout réel x, $F(-x)=-F(x)+\lambda$. En remplaçant x par 0, on obtient $\lambda=0$ et $F(-x)=-F(x)$. F est donc impaire.

4) Pour tout $x\geq 0$ et pour tout t appartenant à $[0,x]$, $0<1+t^2\leq 1+2t+t^2$ soit $0<1+t^2\leq(1+t)^2$ d'où $0<\sqrt{1+t^2}\leq 1+t$ donc $\frac{1}{1+t}\leq\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. En intégrant sur $[0,x]$, on a $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$. Donc $[\ln(1+t)]_0^x\leq F(x)$ soit $F(x)\geq\ln(1+x)$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$, on a $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty}$.

5) $x\mapsto 2x$ et F sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $x\mapsto F(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

$$G'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}}$$

$$G'(x) = \frac{(2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+4x^2})(2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+4x^2})}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}(2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+4x^2})}$$

$$G'(x) = \frac{4(1+x^2) - (1+4x^2)}{\dots} = \frac{3}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}(2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+4x^2})}$$

Pour tout réel x, $G'(x) > 0$ donc G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6) Pour tout réel $x > 0$, $0 < x^2 < 1 + x^2$ donc $0 < x < \sqrt{1+x^2}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x}$. Pour tout $x > 0$, $x < 2x$ donc en intégrant sur $[x, 2x]$, $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} \mathrm{d}t$ soit $F(2x) - F(x) \leq [\ln(t)]_x^{2x}$.

$$\boxed{G(x) \leq \ln(2)}.$$

Exercice n 37

Pour chaque entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2} \mathrm{d}x$.

1) Montrer que l'on définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont chaque terme est positif ou nul.

2) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge.

3) Déterminer un réel a vérifiant : $\frac{1}{1+2x+4x^2} \leq a$ pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution

1) $1 + 2x + 4x^2$ est, pour tout x appartenant à $[0,1]$, supérieur ou égal à 1 donc non nul.

$x \mapsto \frac{x^n}{1+2x+4x^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale est bien définie.

Pour tout x appartenant à $[0,1]$, $\frac{x^n}{1+2x+4x^2} \geq 0$ donc, en intégrant sur $[0,1]$, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2} \mathrm{d}x \geq 0}$.

2) $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+2x+4x^2} \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2} \mathrm{d}x$.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+2x+4x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+2x+4x^2} \mathrm{d}x.$$

Pour tout x appartenant à $[0,1]$, $\frac{x^n(x-1)}{1+2x+4x^2} \leq 0$ donc, en intégrant sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+2x+4x^2} \mathrm{d}x \leq 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

3) Pour tout x appartenant à $[0,1]$, $1+2x+4x^2 \geq 1$ donc $\frac{1}{1+2x+4x^2} \leq 1$. On peut prendre $a=1$.

Ainsi, $\frac{x^n}{1+2x+4x^2} \leq x^n$ $(x^n \geq 0)$. En intégrant sur $[0,1]$, $u_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$ soit $u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Finalement, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$