Université Félix Houphouët-Boigny **2025-2026**
UFRMI-L1

TD-Fiche 3-4/4-ECUE : Dérivation des fonctions réelles

NB : Cette fiche porte sur les deux derniers chapitres (3 et 4) [(Chap 3 : Développement de Taylor et convexité : Formule de Taylor-Lagrange, conditions d'extrémalité d'ordre 2 et fonctions convexes) et (Chap 4 : Développements asymptotiques et analyse des variations : Formule de Taylor-Young, notations o et O de Landau, développements limités et échelles de comparaison)].

NB : Les exercices de cette fiche ne sont pas tous à traiter en séances de TD.

Chapitre III

Théorème de Taylor-Lagrange

Exercice 1. Montrer que :

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$;
2. pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \cos(x) \leq x \sin(x)$;
3. pour tout $x \in]-1, 1[$, $|\arcsin(x)| \leq \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$;
4. pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$;
5. pour tout $[-1, 1]$, $1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$;
6. pour tout $[0, \pi/2]$, $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!}\cos(x)$;
7. pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 2. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I, à la dérivée seconde positive. Montrer que le graphe de f est " au-dessus de ses tangentes".

Exercice 3. Soient $a, h \in \mathbb{R}$, avec $h > 0$, et $f : [a, a+2h] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $[a, a+2h]$. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h) = h^2 f''(a + 2\theta h).$$

Exercice 4. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^2$) sur $]-1, 1[$ telle que $f''(0) \neq 0$, et soit $\theta :]-1, 1[\to]0, 1[$ une fonction pour laquelle, pour tout $x \in]-1, 1[$, on puisse écrire l'égalité $f(x) = f(0) + xf'(x\theta(x))$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \theta(x) = 1/2$.

Exercice 5 (Inégalité de Kolmogorov)**.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que $|f|$ et $|f''|$ sont bornées respectivement par M_0 et M_2. Montrer que $|f'|$ est bornée par $2\sqrt{M_0 M_2}$.

Conditions d'extrémalité d'ordre 2

Exercice 6. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/(1+x^2)$.

1. Montrer que 0 est le seul extremum de f.
2. S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ? Justifier votre réponse.

Exercice 7. Soit la fonction $f : \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin(1/x)$.

1. Montrer qu'aucun point intérieur à $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ ne peut être un extremum de f.
2. En déduire que f atteint ses bornes aux points $\frac{\pi}{2}$ et 2π, puis comparer $\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{2}{\pi}\right)$ et $2\pi\sin\left(\frac{1}{2\pi}\right)$.

Convexité

Exercice 8. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := 0$ si $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 1$ est convexe sur $[0,1]$.

Exercice 9.
1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que si g est croissante sur $\mathbb{R}$, alors la composée $g \circ f$ est convexe.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe, alors f est convexe.

Exercice 10. Montrer que si une fonction f convexe sur $\mathbb{R}$ n'est pas constante, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. En particulier f n'est pas majorée.

Exercice 11.
1. Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) := \ln(1 + \exp(t))$. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soient λ et μ deux réels positifs tels que $\lambda + \mu = 1$. Montrer que, pour tous réels strictement positifs x et y, on a $1 + x^\lambda y^\mu \leq (1+x)^\lambda (1+y)^\mu$.

Exercice 12. Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si, pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, l'on a

$$\Delta(x,y,z) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0.$$

où $\Delta(x,y,z)$ est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I telle que pour tout $(x,y) \in I^2$, on ait :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 14 (Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

Exercice 15 (Inégalité de Young)**.** Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que, si x et y sont des réels positifs, on a :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Chapitre IV

Théorème de Taylor-Young

Exercice 16. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle I et a un élément de l'intérieur de I. Calculer la limite, quand h tend vers 0, de :

$$\frac{1}{h^3}\left(f(a+3h) - f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)\right).$$

Exercice 17. Soit $f :]-2,2[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^2$) sur $]-2,2[$ telle que $f(0) = 0$. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n^2}\right) =: \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

Exercice 18.
1. Soit n et $p \geq 1$ des entiers naturels et u une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+p}$ sur un intervalle I contenant 0. On suppose $\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}$, $u^{(k)}(0) = 0$. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{u(x)}{x^p}$ se prolonge sur I en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Préciser ce prolongement et ses dérivées en 0.
2. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Comparaison locale de fonctions et notations o et O de Landau

Exercice 19. Montrer que :
1. $\sin(x) = o_0(\sqrt{|x|})$;
2. $\sin(x) = o_0(\cos(x))$;
3. pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ si $\alpha < \beta$ et $x^\alpha = o_{0^+}(x^\beta)$ si $\alpha > \beta$;
4. pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $(\ln(x))^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ et $|\ln(x)|^\alpha = o_{0^+}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$;
5. pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $x^\beta = o_{+\infty}(\exp(\alpha x))$ et $|x|^\beta = o_{-\infty}(\exp(-\alpha x))$;
6. $x\sin(x) = O_0(x)$;
7. $\sin(x) = O_0(\cos(x))$.

Exercice 20.
1. Montrer qu'au voisinage de l'infini ($-\infty$ et $+\infty$), $\mathrm{E}(x) \sim x$, où E désigne la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\ln(x+\sqrt{x^2-1}) \sim \ln(x)$ et $\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \sim \ln(x)$.

3. Soit $f : x \mapsto \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$. Après avoir préciser le domaine de définition de f, montrer que $f(x) \underset{0}{\sim} \exp(2)$.

Exercice 21. 1. Calculer la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^{x^x}\ln(x)}{x^x-1}$.

2. Calculer la limite en $\frac{1}{2}$ de la fonction $g : x \mapsto (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$.
3. Déterminer un équivalent de chacune des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de termes généraux

$$u_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{3n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \left[\arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right]\left[n^2 \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

puis en déduire les limites éventuelles.

Développements limités et échelles de comparaison

Exercice 22. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \geq 0,\ f(x) = \cosh(\sqrt{x}) \quad \text{et} \quad \forall x < 0,\ f(x) = \cos(\sqrt{-x}).$$

1. Ecrire le développement limité de cos et cosh à l'ordre 4 en 0 (ou encore au voisinage de 0), puis montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et le calculer.
2. Montrer que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+|x|^5}$ n'admet pas de développement limité à l'ordre 5 en 0.

Exercice 24. 1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(|\sin(x)|)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi\mathbb{Z}\}$. Montrer que la fonction $g : x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi\mathbb{Z}\} \mapsto f(x) - \ln(|x|)$ admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, puis en déduire un développement asymptotique de f en 0 (on précisera l'échelle de comparaison et la précision de ce développement asymptotique).

   Indications : *On pourra remarquer que* $f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(|x|)$ *sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$.

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de Arctan, puis en déduire un développement asymptotique de f en 0 (on précisera l'échelle de comparaison et la précision de ce développement asymptotique).
3. Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(\operatorname{sh}(x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$, puis en déduire un développement asymptotique de f en 0 (on précisera l'échelle de comparaison et la précision de ce développement asymptotique).

   Indications : *On pourra remarquer que* $f(x) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)$.

Exercice 25. On considère les fonctions $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ et $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{x}\sqrt{1+x} - 1$. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction g, puis en déduire un développement asymptotique de f en $+\infty$ (on précisera l'échelle de comparaison et la précision de ce développement asymptotique).
Indications : *On pourra remarquer que* $f(x) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.