

Rappels

Sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E , de dimension n , muni d'une base considérons une famille S de vecteurs de E . Le rang de S est le rang de la A matrice constituée en lignes ou en colonnes des coordonnées des vecteurs de S .

On notera que A est une matrice associée à la suite S .

1. S est génératrice de E ssi le rang de $S = n = \text{rang}(A)$
2. S est libre ssi le rang de $S = \text{Cardinal de } S (\text{Card}S) = \text{rang}(A)$
3. S est liée ssi le rang de S est **strictement inférieur** au Cardinal de $S (\text{Card}S)$
4. S est une base de E ssi le rang de $S = n = \text{Cardinal de } S (\text{Card}S) = \text{rang}(A)$
5. Soit $F = \langle S \rangle$, alors $\dim F = \text{rang}(S) = \text{rang}(A)$

EXERCICE 1

Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

1. $u = (7, 12)$; $v = (18, -13)$; $w = (-4, 17)$
2. $u = (-1, 0, 2)$; $v = (1, 3, 1)$; $w = (0, 1, -1)$
3. $u = (15, -27, -6, 12)$; $v = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2\right)$.

EXERCICE 2

On se place dans \mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et on définit les vecteurs $w_1 = (1, 1, 1)$; $w_2 = (1, 0, 0)$; $w_3 = (1, 1, 0)$; $w_4 = (0, 0, 1)$; $w_5 = (2, 2, 0)$.

Pour chacune des familles suivantes dire si elle est génératrice :

$$S_1 = \{w_1, w_2\}; S_2 = \{w_2, w_5\}; S_3 = \{w_3, w_5\}; S_4 = \{w_4, w_5\}; S_5 = \{w_1, w_2, w_3\}; \\ S_6 = \{w_1, w_3, w_4\}; S_7 = \{w_5, w_3, w_1\}; S_8 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}.$$

EXERCICE 3

On se place dans \mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et on définit les vecteurs $w_1 = (1, 1, 1)$; $w_2 = (1, 0, 0)$; $w_3 = (1, 1, 0)$; $w_4 = (0, 0, 1)$; $w_5 = (2, 2, 0)$.

Les familles suivantes sont-elles des bases de \mathbb{R}^3 :

$$S_1 = \{w_1, w_2\}; S_2 = \{w_2, w_5\}; S_3 = \{w_3, w_5\}; S_4 = \{w_4, w_5\}; S_5 = \{w_1, w_2, w_3\}; \\ S_6 = \{w_1, w_3, w_4\}; S_7 = \{w_5, w_3, w_1\}; S_8 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}.$$

EXERCICE 4

\mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) .

Soient les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$; $u_2 = (-1, 1, 0)$; $u_3 = (1, 0, -1)$.

1. Montrer que $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Donner les coordonnées respectives des vecteurs $(1, 0, 0)$; $(1, 0, 1)$ et $(0, 0, 1)$ dans B_1 .
3. Soit $B_2 = \{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 0)\}$.
(a) Montrer que B_2 est une base de \mathbb{R}^3 .
(b) Trouver dans B_1 et B_2 les composantes du vecteur $(1, 2, 1)$.

EXERCICE 5

\mathbb{R}^4 est muni de sa base canonique (t_1, t_2, t_3, t_4) . On considère les vecteurs :

$$e_1 = (1, 2, 3, 4); e_2 = (1, 1, 1, 3); e_3 = (2, 1, 1, 1); e_4 = (-1, 0, -1, 2); e_5 = (2, 3, 0, 1).$$

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F par e_4 et e_5 .

Calculer les dimensions respectives de $E, F, E \cap F$ et $E + F$.

EXERCICE 6

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + 2t = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$

- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
- b) Donner une base et la dimension de E .

EXERCICE 7

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0 \text{ et } z = 0\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^3 .

EXERCICE 8

Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$; $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$ et $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} ; (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z$.

1. Montrer que f, g et h sont linéaires.
2. Déterminer noyau et image dans chaque cas.

EXERCICE 9

Vous répondrez par Vrai ou faux avec justification

- a) A un homomorphisme donné f correspond une infinité de matrices qui lui sont associées.
- b) L'application identique d'un espace vectoriel E de dimension finie se traduit par la même matrice dans toutes les bases de E .

EXERCICE 10

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 défini par :

$$f(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4; f(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4; f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$$

$$f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

1. Donner la matrice de f relativement à la base β . f est-il un automorphisme?
2. Calculer $f(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ de deux façons.
3. Déterminer $\ker f$ et $\text{Im } f$.
4. Soit $F = \text{vect}(e_3, e_4)$. F et $\ker f$ sont-ils supplémentaires?

EXERCICE 11

On considère \mathbb{R}^3 muni de la base canonique $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Soient $\vec{u} = e_1 + 2e_2 + e_3, \vec{v} = -2e_1 + e_2 - e_3, \vec{w}_m = me_2 - e_3; m \in \mathbb{R}$

- 1) Pour quelles valeurs de $m, S_m = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_m\}$ est-il une base de \mathbb{R}^3 ?
En déduire que S_1 est une base de \mathbb{R}^3 .
- 2) Déterminer la matrice de passage de la base β à la base S_1 .
- 3) Déterminer la matrice de passage de la base S_1 à la base β .
- 4) Soit $\vec{H} = (-5; 1; 2)$. Quelles sont les coordonnées de \vec{H} dans la base S_1 ?
- 5) On considère l'application linéaire
 $f_m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x; y; z) \mapsto (x + 2y + z; -2x + y - z; my - z)$.

- a) Quelle est la matrice de f_m dans la base β ?
 - b) Dans quels cas f_m est-elle un automorphisme de \mathbb{R}^3 ?
- En déduire que f_0 et f_1 sont des automorphismes de \mathbb{R}^3 .

- c) Trouver $(x; y; z)$ tel que $f_1(x; y; z) = (0; 1; 7)$ et calculer $(f_1)^{-1}(2; 5; 0)$.

EXERCICE 12

On considère $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

On appelle φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est A

- 1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- 2) Montrer que φ est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .
- 3) On note $B = \{u_1 = (1, 0, 0); u_2 = (5, -2, 2); u_3 = (-1, 1, 2)\}$
 - a) Montrer que B est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Trouver P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base B .
 - c) Calculer P^{-1} .

4) Quelle est la matrice N de φ dans la base B .

5) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 13

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X , à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On donne :

$$B_1 = X^2, B_2 = (X - 1)^2, B_3 = (X + 1)^2, C_1 = 1, C_2 = X, C_3 = X^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (B_1; B_2; B_3)$ et $\mathcal{C} = (C_1; C_2; C_3)$ sont des bases de E .

2. Donner les coordonnées des polynômes suivants dans la base \mathcal{B} .

$$R = 2X - 1, S = 12, T = 3X^2 - 10X + 1.$$

3. On considère l'application $P \mapsto f(P)$ définie dans E par :

$$f(P)(X) = P(X - 1) + (X + 1)P'(X) :$$

Montrer que f est un endomorphisme de E . Donner les matrices :

(i) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f en tant qu'endomorphisme de E muni de la base \mathcal{B} .

(ii) $\text{Mat}_{\mathcal{C};\mathcal{B}}(f)$ de f en tant qu'application linéaire de E muni de la base \mathcal{C} dans E muni de la base \mathcal{B} .