TD3 – Intégration

CALCULS D'INTÉGRALES, DE PRIMITIVES

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de f dans un repère orthogonal.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$.
3. Pour $x \in [0,4]$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
4. Montrer que la fonction F est continue sur $[0,4]$. Est-elle dérivable ?

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^3 |2t-5|\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{E(t)}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^\pi \min(2,t)\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{-1}^2 t|t|\,\mathrm{d}t$

Exercice 3. Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int 3x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x^2)}\,\mathrm{d}x$

À faire chez soi

9. $\displaystyle\int (3x-1)(3x^2-2x+3)\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int (1-\cos(3x))\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4. Calculer à l'aide d'intégrations par parties les primitives ou intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x$ (où $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$)
3. $\displaystyle\int x \arctan(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^2 (x^2 + x + 1)e^x\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$

À faire chez soi

7. $\displaystyle\int (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int x^3 \sin(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 5. On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}\,dx$$

Calculer I en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$.

Exercice 6. Calculer les primitives ou intégrales suivantes, à l'aide de changements de variables :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x$ (avec $t = \sqrt[6]{2+x}$)
2. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1 + x^3}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(3 + e^x)\sqrt{e^x - 1}}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\,\mathrm{d}x$

À faire chez soi

7. $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \sin(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos\left(\sqrt{1-t}\right)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1 - \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{1 + e^t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2}\,\mathrm{d}t$ (où $a > 0$)

Pour aller plus loin

Exercice 8.

1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a + b - x)\,\mathrm{d}x$$

En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/4} \ln\big(1 + \tan(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

2. Montrer que, si $a > 1$,

$$\int_{1/a}^{a} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

Indication : utiliser la formule $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x > 0$.

Exercice 9. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes, puis en calculer les primitives :

1. $\dfrac{x^3+4}{x^2-4}$
2. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$
3. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$
4. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$
5. $\dfrac{1}{t^3+1}$

À faire chez soi

6. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$
7. $\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)}$

Pour aller plus loin

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On définit une fonction F par $F(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$, alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$, alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$, alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire, alors F est impaire.

Exercice 11. Déterminer les fonctions continues f sur $[a, b]$ telles que

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$$

Suites définies par des intégrales

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\, \mathrm{d}t$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n en fonction de n.

Exercice 13. (Intégrales de Wallis)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer I_{2p} et I_{2p+1}.
4. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.

À faire chez soi

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer nI_nI_{n+1}.
6. En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

À faire chez soi

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans calculer les intégrales, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$$

Compléments : Sommes de Riemann

Pour aller plus loin

Exercice 16. Calculer les limites suivantes en reconnaissant des sommes de Riemann :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$

Exercice 17. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p^2}.$$