UFHB
Année 25_26 TD: Intégration et équa. diff
Niveau: L1

Exercice 1:
1) Montrer que $\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
2) On pose $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right]$ et $u_n = \ln(v_n)$
Déterminer $\lim\limits_{+\infty} v_n$
3) Calculer les limites de la suite (u_n) dans les cas suivants:
a) $u_n = \sqrt[n]{\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]...\left[1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]}$
b) $u_n = \frac{1}{n}\prod\limits_{k=1}^{n}(k+n)^{\frac{1}{n}}$; c) $u_n = \sum\limits_{p=n}^{2n}\frac{1}{p}$; d) $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}$
e) $u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$; f) $u_n = n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{-n}{k}}}{k^2}$; g) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+k^2}$
Exercice 2
Sans utiliser les primitives, calculer
a) $I = \int_{-1}^{4}(1+x)\,dx$; b) $J = \int_a^b \frac{dx}{x^2}$; $0 < a < b$ c) $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$
Exercice 3
1) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note:
$T_k = \int_0^1 x^k |f(x)|\,dx$.
Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a $T_{p+q}^2 \leq T_{2p}T_{2q}$
2) On suppose à présent f continue et > 0 sur $[a,b] = I$.
Déterminer $\delta = \inf\limits_{f \in I}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$
Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt$
1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$
2) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}
3) En déduire la limite de la suite de terme général
$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$
Exercice 5
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}dt$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^{2x}\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}dt$
Exercice 6
1) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t}f(t)dt$
2) On considère l'équation différentielle
$(E) : xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$
2.a) Résoudre (E) sur des intervalles qu'on précisera
2.b) Etudier l'existence des solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7
Résoudre les équations différentielles suivantes:
a) $2x^2y' = (x-1)\left(y^2 - x^2\right) + 2xy$; $x > 0$; $y_0(x) = x$ (sol. part.)
b) $y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2}$; $x > 0$; $y_0(x) = \frac{1}{x}$ (sol. part.)
c) $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$
Exercice 8
1) Soit $m \in \mathbb{R}$.Déterminer les solutions réelles de l'équation
$my'' - \left(1 + m^2\right) y' + my = xe^x$
2) Résoudre l'équation diff. $y'' - 4y' + 4y = e^t + (3t-1)\, e^{2t} + t - 2$

Exercice 9
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$\left(t^2 + 1\right) y'' + \left(t^2 - 2t + 1\right) y' - 2ty = 0$. (indic.: poser $z = y' + y$)
b) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle:
$(E) : x^2y'' + 3xy' + y = x^2$
(indication: faire le changement de variable $t = \ln x$)