

Rappel

Structure de groupe. Un ensemble G muni d'une loi $*$ est un *groupe* si :

- (i) $*$ est **associative** ;
- (ii) G possède un **élément neutre** e ;
- (iii) tout élément de G admet un **inverse**.

Si de plus $*$ est commutative, le groupe est dit **abélien**.

Sous-groupe. $H \subset G$ est un sous-groupe si et seulement si $H \neq \emptyset$ et $\forall x, y \in H, x*y^{-1} \in H$.

Morphisme de groupes. $\varphi : (G, *) \rightarrow (G', \star)$ est un morphisme si $\forall x, y \in G, \varphi(x*y) = \varphi(x) \star \varphi(y)$. Son noyau $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe distingué de G .

Notation. $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe symétrique, $\varepsilon(\sigma)$ la signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\text{ord}(g)$ l'ordre d'un élément g dans un groupe.

Partie I Lois de composition et premières structures

Exercice 1 – Une loi de groupe sur E ★

Soit $E =]-1, 1[$ et $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$ pour tous $x, y \in E$.

1. Montrer que $(E, *)$ est bien définie (i.e. $*$ est une loi interne sur E) et identifier $*$ géométriquement via $\tanh$.
2. Montrer que $(E, *)$ est un groupe abélien.

Exercice 2 – Groupe affine ★★

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on note $f_{a,b}$ l'application affine $x \mapsto ax + b$. On pose

$$\mathcal{A} = \{f_{a,b} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ muni de la composition $\circ$ est un groupe.

2. Montrer que pour tous $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $f_{a,b}$ et $f_{c,d}$ commutent si et seulement si $b(c-1) = d(a-1)$.
3. Montrer que le groupe $(\mathcal{A}, \circ)$ n'est pas abélien.
4. Déterminer le centre $Z(\mathcal{A})$ des éléments qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 3 – Groupe G_m ★

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $G_m = \{m^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que G_m muni de la multiplication usuelle est un groupe abélien.

Exercice 4 – Un groupe de rationnels ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha \neq 1$ et

$$G_\alpha = \left\{ \frac{1+n\alpha}{1+m\alpha} \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Montrer que G_α muni de la multiplication usuelle est un groupe abélien.

Partie II Groupes matriciels classiques

Exercice 5 – Groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ ★

Soit $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ et } \det(A) = 1 \right\}$.

Montrer que $(SL_2(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.

Exercice 6 – Groupe spécial orthogonal $SO(2)$ ★★

On considère $SO(2) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^t A A = I_2 \text{ et } \det(A) = 1\}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $SO(2) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
2. En déduire que $SO(2)$ est un groupe abélien.

Exercice 7 – Groupe symplectique $Sp(2n, \mathbb{R})$ ★★★

Soit $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(J_n) = 1$.
2. Montrer que $J_n^2 = -I_{2n}$.
3. Soit $Sp(2n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t M J_n M = J_n\}$.
 - (a) Montrer que $Sp(2n, \mathbb{R}) \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$ et que pour tout $M \in Sp(2n, \mathbb{R})$, $M^{-1} = -J_n {}^t M J_n$.
 - (b) En déduire que $Sp(2n, \mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.

Exercice 8 – Groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$ ★★★

Soient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad L \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C}).$$

On pose $\mathbb{H}_8 = \{\pm I_2, \pm J, \pm K, \pm L\}$.

1. Calculer L et justifier que $J, K, L \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$.
2. Soit $\mathbb{H}_8 = \{\pm h_1, \pm h_2, \pm h_3, \pm h_4\}$. Déterminer la table de multiplication de $\mathbb{H}_8$.
 - (a) Soit $\mathbb{H}_8 = \{\pm I_2, \pm J, \pm K, \pm L\}$. Montrer que $\mathbb{H}_8$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$.
 - (b) En déduire que $\mathbb{H}_8$ n'est pas abélien.
 - (c) Montrer que tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$ sont des sous-groupes différents de $\mathbb{H}_8$.

(d) Montrer que tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$ sont abéliens.

Partie III Sous-groupes et morphismes

Exercice 9 – Matrices de permutation ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit $P_\sigma = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ par $p_{ij} = \delta_{i, \sigma(j)}$.

1. Montrer que $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.
2. Montrer que $G = \{P_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ muni de la multiplication matricielle est un groupe.
3. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 10 – Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ ★★

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ avec $G \neq \{0\}$, et $G_+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que G_+ admet une borne inférieure $a \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Donner un exemple de sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11 – Réunion des groupes de racines de l'unité ★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Montrer que $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe abélien.

Exercice 12 – Sous-groupes distingués ★★★

Soient $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e et H un sous-groupe de G . On dit que H est *distingué* dans G si $\forall k \in G, \forall h \in H, k^{-1} * h * k \in H$.

1. Donner des exemples de sous-groupes distingués.
2. Montrer que si $(G', \star)$ est un groupe et $\psi : G \rightarrow G'$ un morphisme, alors $\text{Ker}(\psi)$ est un sous-groupe distingué de G .
3. En déduire que $\text{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$ est distingué dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.
4. En déduire que le sous-groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est distingué dans $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.

Exercice 13 – Sous-groupe caractéristique ★★★

Soient $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e et H un sous-groupe de G . On dit que H est *caractéristique* si $\varphi(H) = H$ pour tout $\varphi \in \text{Aut}(G)$.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si G admet un unique sous-groupe H d'ordre d , alors H est caractéristique.

2. Pour $x, y \in G$, on appelle *commutateur* de x et y l'élément $[x, y] = x * y * x^{-1} * y^{-1}$. Soit D le sous-groupe de G engendré par tous les commutateurs (sous-groupe dérivé).

- (a) Montrer que G est abélien si et seulement si $D = \{e\}$.
- (b) Montrer que D est un sous-groupe caractéristique de G .

Partie IV Centres, ordres et groupes cycliques

Exercice 14 – Centre du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ★★

On cherche à déterminer le centre $Z(\mathfrak{S}_n)$ du groupe symétrique.

1. Déterminer $Z(\mathfrak{S}_1)$ et $Z(\mathfrak{S}_2)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que si $\sigma \neq \text{Id}_{[1,n]}$, il existe $b, c \in [1, n]$ tels que $b \neq c$ et $\sigma \circ \tau_{b,c} \neq \tau_{b,c} \circ \sigma$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 3$, $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\text{Id}_{[1,n]}\}$.

Exercice 15 – Centre du groupe général linéaire ★★★

On cherche à déterminer $Z(\text{GL}_n(\mathbb{K}))$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = \{E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Pour $1 \leq i \leq n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, soit $D_{i,\alpha} = (\alpha - 1)E_{i,i} + I_n$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $D_{i,\alpha} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. Pour $i \neq j$, soit $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$. Montrer que $P_{i,j} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. En déduire que $Z(\text{GL}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Exercice 16 – Sous-groupes d'un groupe cyclique ★★

Soient $(G, *)$ un groupe cyclique d'ordre n , $a \in G$ un générateur, H un sous-groupe de G et φ l'indicatrice d'Euler.

1. Soit $A = \{0 \leq p \leq n-1 \mid a^p \in H\}$.
 - (a) Montrer que A admet un plus petit élément q .
 - (b) Montrer que $H = \langle a^q \rangle$ et en déduire que H est cyclique.
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $d \mid n$.
 - (a) Montrer que $\text{ord}(a^{n/d}) = d$.
 - (b) Montrer que $\langle a^{n/d} \rangle$ est l'unique sous-groupe de G d'ordre d .
3. Montrer la **Formule de Möbius** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$.

Exercice 17 – Polynômes cyclotomiques ★★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ et φ l'indicatrice d'Euler.

1. Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe abélien fini d'ordre n .
2. Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est cyclique et déterminer l'ensemble Ω_n de ses générateurs.

3. Soient $z \in \mathbb{U}_n$ et $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \mid n$. Montrer que $\text{ord}(z) = d$ si et seulement si $z \in \Omega_d$.
4. En déduire que $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d \mid n} \Omega_d$.
5. On appelle n -ième *polynôme cyclotomique* le polynôme

$$Q_n = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \wedge n = 1}} \left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right).$$

- (a) Déterminer le degré de Q_n .
- (b) Calculer Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 .
- (c) Montrer que $\prod_{d \mid n} Q_d = X^n - 1$.
- (d) En déduire que $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$ (Formule de Möbius).