

Travaux Dirigés N<sup>o</sup>1 d'Analyse II

Calculs Intégrales

Exercice 1\*

Calculer l'intégrale de  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  comme limite de sommes de Riemann-Darboux dans les cas suivants : 1)  $f(x) = \sin x$  et  $f(x) = \cos x$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ ,  $k = 0, \dots, n$ , 2)  $g(x) = \frac{1}{x}$  sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$  et  $x_k = aq^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  ( $q$  étant à déterminer), 2)  $h(x) = \alpha^x$  sur  $[a, b]$ ,  $\alpha > 0$ , et  $x_k = a + (b - a) \cdot \frac{k}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Exercice 2\*

1) Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse. a) Toute fonction intégrable sur  $[a, b]$  est continue. b) Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ , sauf en un point, alors  $f$  admet une primitive qui s'annule en  $b$ . c) Toute primitive d'une fonction continue sur  $[a, b]$  est dérivable sur  $]a, b[$ . d) Toute primitive d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle. 2) Calculer la limite de la suite  $u_n$  suivante :  $u_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n-k}{n^3 + n^2k}}$

Exercice 3\*

Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :  $\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx$ ,  $\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx$ ,  $\int \frac{1}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} dx$ ,  $\int \frac{x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2 - 1} dx$ ,  $\int \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}} dx$ ,  $\int \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx$ ,  $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Exercice 4\*

Soit l'intégrale  $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)} dx$  1) Calculer la valeur de  $J$  (effectuer le changement de variable  $x = \cos(t)$ , puis  $u = \tan(t)$ ). 2) En déduire la valeur de l'intégrale  $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \arctan(\sqrt{1-x^2}) dx$

Exercice 5\*

Répondre par "vrai" ou "faux" et accompagnez votre réponse d'une démonstration détaillée au cas "vrai" et d'un contre-exemple détaillé au cas "faux". 1) Si  $f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  alors  $f$  est intégrable si et seulement si  $f^2$  est intégrable. 2) Soit  $f$  différentiable sur un voisinage  $]a, b[$  de 0 et supposons que la dérivée  $f'$  de  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0. Alors  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n+1$  au voisinage de 0. 3) Soit  $a < b$ . Si  $f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  est intégrable sur  $[a, b]$  alors la fonction  $F \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  définie pour  $x \in [a, b]$  par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est dérivable et  $\forall x \in [a, b] F'(x) = f(x)$

Exercice 6\*

1) Déterminer l'ensemble des applications dérivables de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ , solutions de l'équation différentielle.  $(x \ln x)y' - (3 \ln x + 1)y = x^3(x - x \ln x - 1)$  2) a) Calculer la limite de la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  définie par  $v_n = \int_0^1 x^n \sin^2(x^2) dx$  b) En intégrant adéquatement par parties, trouver un équivalent de  $v_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ . 3) a) Écrire le développement limité de  $x \mapsto \text{Arctg}(x)$  à l'ordre 6 au voisinage de 0. b) Montrer qu'il existe deux nombres rationnels  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que  $\text{Arctg}(x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5) = x + o(x^5)$  c) En déduire le développement limité de  $x \mapsto \tan(x)$  à l'ordre 5 au voisinage de 0. d) Montrer que l'on a, quand  $x \rightarrow 0$ ,  $\int_x^1 \tan(t)dt = -\ln(\cos 1) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$  4) Calculer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  suivante :  $u_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$  5) Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ . a) Démontrer

l'inégalité de **Cauchy-Schwartz** suivante :  $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b (f(t))^2 dt \times \int_a^b (g(t))^2 dt$  b) Soient  $f, g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues, telles que :  $f \geq 0, g \geq 0, fg \geq 1$ . Montrer :  $\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geq 1$

Exercice 7\*

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ). 1) On suppose que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ , que  $f$  est continue en un point  $x_0 \in [a, b]$  et que  $f(x_0) > 0$ . Montrer que  $\int_a^b f(x)dx > 0$ . En déduire que si  $f$  est une fonction continue positive sur  $[a, b]$  telle que  $\int_a^b f(x)dx = 0$  alors  $f$  est identiquement nulle. 2) On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , et que  $\int_a^b f(x)dx = 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ . 3) Application : on suppose que  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  telle que  $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$ . Montrer qu'il existe  $d \in [0, 1]$  tel que  $f(d) = d$ .

### Exercice 8\*

1) Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite, dont le terme général est  $u_n$  converge et calculer sa limite.

a)  $U_n = n^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{n+k}$ , b)  $U_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$  2) Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :  $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ ,  $J = \int_0^1 \sin(\ln x) dx$ ,  $K = \int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2} dx$  3) Pour  $p$  et  $q$  entiers naturels, on pose  $I(p, q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$

a) Montrer que  $I(p, q) = \frac{p}{1+q} I(p-1, q+1)$  pour  $q \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ . En déduire que  $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$  b) En déduire la valeur de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x \cos^{2q+1} x dx$  4) Soit  $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}} dt$ ,  $x, a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a) Montrer que l'on a  $nI_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)a^2 I_{n-2}(x)$ , pour  $n \geq 2$  b) En déduire la valeur de  $I_5(2) = \int_0^2 \frac{t^5}{\sqrt{t^2+5}} dt$

### Exercice 9\*

Soit l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} dt$  1) Soit l'application  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} dt$ . Montrer que  $F$  est dérivable et calculer sa dérivée. 2) a) Établir une relations entre  $f$  et  $F$ . b) Étudier la parité de  $f$ . c) Étudier les variations de  $f$  et établir son tableau de variation. 3) Tracer la représentation graphique de  $f$ . **Données : A l'aide de MAPLE 6 on obtient  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,389990045$**

### Exercice 10\*

On considère la fonction polynôme  $P$ , définie par :  $P(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$  1) Écrire  $P(x)$  comme produit de fonctions polynômes irréductibles. 2) Décomposer en éléments simples la fonction rationnelle  $R$ , définie par :  $R(x) = \frac{x^8+1}{P(x)}$  3) Déterminer une primitive de la fonction  $x \mapsto R(x)$ .

### Exercice 11\*

Soient trois fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :  $f$  continue,  $u$  et  $v$  dérivables. Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . On pose  $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$  1) Exprimer  $g$  à l'aide de  $F$ ,  $u$  et  $v$ ; en déduire sa dérivée  $g'(x)$ . Dans toute la suite du problème, on pose  $g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ . 2) Montrer que la fonction  $g$  est impaire et étudier ses variations. 3) Déterminer le développement limité de  $g$  à l'ordre 5 au voisinage de zéro. 4) a) Démontrer les inégalités  $\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \frac{1}{t^2}$ . b) En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan 2x - \arctan x \leq g(x) \leq \frac{1}{2x}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  c) Sachant que  $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 0,39$ , donner l'allure de la courbe représentative de la fonction  $g$ .

5) On pose  $H(X) = \int_0^X (\arctan 2x - \arctan x) dx$ . a) Calculer  $H(X)$ . b) Démontrer la relation  $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$ . En déduire que  $H(X) \sim \frac{1}{2} \ln X$  lorsque  $X$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 12\*

1) Écrire le développement limité à l'ordre trois en 0 de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1-2x}$ . 2) En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle  $R = \frac{1}{x^4(1-2x)}$ . 3) Calculer la primitive  $\int \frac{dx}{x^4(1-2x)}$ .

### Exercice 13\*

1) Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Etablir  $\int_0^\pi t f(\sin t) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin t) dt$   $I_n = \int_0^\pi \frac{x \sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} dx$