Série entières et séries de Fourier

ESSOH Modeste

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA
UFR SFA

22 mars 2015

Plan

Définition 1.1

On appelle série entière une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ où les fonctions f_n sont de la forme spécifique

$$f_n(z) = a_n z^n \quad \text{avec} \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

En d'autres termes, une série entière est définie par la donnée d'une suite de nombres complexes $(a_n)_n$, et l'on note alors la série entière

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

En cas de convergence, la somme est notée :

$$S : z \mapsto S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Remarque 1.2

L'*addition* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.
Le *produit* de la série entière $\sum a_n z^n$ par le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, est la série entière $\sum \lambda a_n z^n$.
Le *produit de Cauchy* des séries entières $\sum a_p z^p$ et $\sum b_q z^q$ est la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

Lemme 1.3 :Lemme d'Abel

Si la *suite* $(|a_n|r_0^n)_n$ est majorée, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r_0$.

Preuve.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n|r_0^n \leq M$; alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n|r_0^n \left(\frac{|z|}{r_0}\right)^n \leq M\left(\frac{|z|}{r_0}\right)^n.$$

$\sum (|z|/r_0)^n$ est une série géométrique, de raison positive et plus petite que 1 ($|z| < r_0$), donc convergente ; le théorème de comparaison montre l'absolue convergence de $\sum a_n z^n$. $\square$

Définition 1.4 : Rayon de convergence

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la quantité notée R définie par :

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

Le rayon de convergence R est à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Définition 1.5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- On appelle intervalle de convergence l'intervalle $]-R; R[$
- On appelle disque de convergence noté $\mathcal{D}_R$ l'ensemble défini par :

$$\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < R\}$$

Conséquences :

- La série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument en tout point z de son disque (resp. intervalle) ($|z| < R$) ouvert de convergence.
- En tout point z extérieur au disque ouvert de convergence, c'est-à-dire en tout point z tel que $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas majorée et la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- On ne peut rien dire, en général, de la nature de la série $\sum a_n z^n$ en tout point z de module $|z| = R$; c'est pourquoi le cercle de centre 0 et de rayon R est appelé *cercle d'incertitude*.

Exemple : Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n.$$

On a $|\sin(n)z^n| \leq |z|^n$. Si $|z| < 1$, alors la série géométrie $\sum_{n \geq 0} |z|^n$ est convergente. Ainsi la série $\sum_{n \geq 0} \sin(n)z^n$ converge (absolument) pour tout $|z| < 1$. Par suite le rayon de convergence $R \geq 1$.
En prenant $z = 1$, la série $\sum_{n \geq 0} \sin(n)$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Ainsi le rayon de convergence $R \leq 1$. D'où finalement $R = 1$.

Théorème 1.6

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'un des intervalles suivants :

$$\begin{aligned}
E &= \{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la suite } (a_n r^n)_n \text{ est majorée}\} \\
F &= \{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la suite } (a_n r^n)_n \text{ admet } 0 \text{ pour limite}\} \\
G &= \{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la série } \sum a_n r^n \text{ converge}\} \\
I &= \{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la série } \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}
\end{aligned}$$

Preuve.

Les inclusions $I \subset G \subset F \subset E$ sont évidentes et donnent les inégalités :

$$\sup I \leq \sup G \leq \sup F \leq \sup E$$

Reste à montrer l'inégalité $\sup E \leq \sup I$; pour cela montrons l'implication

$$r < \sup E \Rightarrow r \in I$$

c'est-à-dire $[0, \sup E[\subset I$.
Si $r < \sup E$, la suite $(|a_n|r^n)_n$ est une suite majorée et le lemme 1.3 montre que $r \in I$. Ainsi, $[0, \sup E[\subset I$ et $\sup E = \sup[0, \sup E[\leq \sup I$.

Théorème 1.7 : Rayon et critère de D'Alembert

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang ; *s'il existe* $\ell \in [0, +\infty]$ avec

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell,$$

alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell}, & \text{Si } \ell \in \mathbb{R}^{+*} \\ +\infty, & \text{Si } \ell = 0 \\ 0, & \text{Si } \ell = +\infty \end{cases}$$

Exemple : Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 1.8

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N \ |a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$;
- Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Théorème 1.9

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, le rayon de convergence de $\sum \lambda\, a_n z^n$ est R_a ; et $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R_a \Rightarrow$ on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda\, a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

- le rayon de convergence R_s de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R_s = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ et $R_s \geq R_a = R_b$ sinon ; et $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_a, R_b)$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

- le rayon de convergence R_c de la série entière produit $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ vérifie $R_s \geq \min(R_a, R_b)$, et $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_a, R_b)$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q z^q \right)$$

Propriété 1.10

Une série entière converge normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé *strictement inclus* dans le disque ouvert de convergence.

Propriété 1.11

La somme d'une série entière définit une fonction continue sur le disque ouvert de convergence.

Propriété 1.12 : Intégration d'une série dans le cas réel

- Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum a_n \frac{x^n}{n+1}$ ont le même rayon de convergence R ;
- pour tout *segment* $[\alpha, \beta]$ de $]-R, R[$, on a :

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \tag{1}$$

- pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{2}$$

Propriété 1.13 : Dérivabilité d'une série entière dans le cas réel

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors

- la série dérivée première $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence R ; la somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R;R[$ et sa dérivée est :

$$\forall x \in]-R;R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

- la série dérivée $p$ième
  $$\sum_{n \geq p} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$
  a le même rayon de convergence R ; la somme S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]-R;R[$, on a :
  $$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p}$$
  $$= \sum_{q=0} \frac{(q+p)!}{q!} a_{q+p} x^q$$
- en particulier :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

Exemple

Exemple : considérons la série : $\sum_n x^n$.

On sait que $R = 1$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

- En dérivant, on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

- En intégrant, on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

définition 3.1

Une fonction f définie sur un intervalle $]-r, r[$ (avec $r > 0$), est dite développable en série entière (au voisinage de 0) s'il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_n$ telle que

$$\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

c'est-à-dire si f est la somme d'une série entière sur l'intervalle $]-r, r[$.
La série entière $\sum a_n x^n$ est appelée *le développement en série entière* de la fonction f sur l'intervalle $]-r, r[$.

La fonction f est dite *développable en série entière au voisinage de* $x = x_0$ si, et seulement si, la fonction $g : u \mapsto f(x_0 + u)$ est développable en série entière au voisinage de $u = 0$. Dans ce cas : il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_n$ tels que :

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Proposition 3.2

Soient f et g de I dans $\mathbb{C}$ sont développable en série entière. La somme $f+g$ et le produit fg sont aussi développable en série entière.

Si f est une fonction développable en série entière sur l'intervalle ouvert $]-r,r[$, f est la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ sur $]-r,r[$; *nécessairement* f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et le coefficient a_n est égal à $f^{(n)}(0)/n!$. Le développement en série entière de f est donc donné par la série $\sum f^{(n)}(0)x^n/n!$, ce qui motive la définition suivante

Définition 3.3 : Série de Taylor d'une fonction

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $x = 0$, la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée *série de Taylor de la fonction f en $x = 0$*.

Il est légitime de se poser deux questions :

- la série de Taylor de f en $x = 0$ a-t-elle un rayon de convergence non nul ?
- si oui, la fonction f est-elle égale à sa série de Taylor sur un voisinage de $x = 0$?

Considérons la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp\left(\dfrac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et, pour tout entier naturel k et tout réel $x \in]0, +\infty[$, $f^{(k)}(x) = Q_k\Big(1/x\Big) \exp\Big(-1/x\Big)$ où Q_k est un polynôme unitaire de degré $2k$ (raisonner par récurrence) ; ainsi

$$f^{(k)}(x) \underset{0}{\sim} x^{-2k} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x \to 0} f^{(k)}(x) = 0$$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout entier k, $f^{(k)}(0) = 0$. La série de Taylor de f en 0 est la série nulle, sa somme est différente de f sur tout voisinage de 0.

Théorème 3.4 : Caractérisation des fonctions développables en série entière

Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 ; f est développable en série entière si, et seulement si, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = 0.$$

Démonstration.

Ce n'est que l'application de la formule de Taylor avec reste intégral, (pour $x \neq 0$) :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

La fonction f est développable en série entière si, et seulement si, la série de Taylor de f converge vers f sur un intervalle $]-r, r[$, c'est-à-dire si, et seulement si, le reste intégral de la formule de Taylor tend vers 0 sur $]-r, r[$. $\square$

Théorème 3.5 : Condition suffisante de développement en série entière

Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0. On suppose qu'il existe $r > 0$ et un réel $M > 0$, tels que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-r, r[,\ \left|f^{(k)}(x)\right| \leq M.$$

Alors f est développable en série entière, et f est égale à sa série de Taylor sur $]-r, r[$

Pour la preuve il suffit de remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-r, r[,\ \left|f^{(k)}(x)\right| \leq M.$$

implique que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = 0.$$

Proposition 3.7

Si f est une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$: $\forall x \in]-r, r[\; f(x) = \sum a_n x^n$, alors

$$f \text{ est une fonction paire} \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, \;\; a_{2p+1} = 0$$

$$f \text{ est une fonction impaire} \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, \;\; a_{2p} = 0$$

Plan

1. Séries entières
2. Série de Fourier
   - Généralité
   - Convergence de la série de Fourier
3. Quelques Exercices

Coefficients de Fourier

Définition 2.1 : Forme réelle des coefficients de Fourier

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que l'on suppose continue par morceaux, et 2π-périodique, ce qui signifie que $f(x+2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les coefficients de Fourier réels de f par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Remarque :
On a toujours $b_0(f) = 0$.
Dans le cas particulier où f est paire, on a

$$b_n(f) = 0 \text{ et } a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt.$$

Dans le cas particulier où f est impaire, on a

$$a_n(f) = 0 \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Définition 2.2 : Forme complexe des coefficients de Fourier

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que l'on suppose continue par morceaux, et 2π-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit les coefficients de Fourier complexe de f par :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Remarque :

De la relation $e^{int} = \cos(nt) + i \sin(nt)$, on obtient :

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \text{ et } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \text{ et } b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Définition 2.3 : Série de Fourier

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que l'on suppose continue par morceaux, et 2π-périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle série de Fourier de f en x la série :

$$SF_f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}dt \quad \text{(avec les coefficients complexes)}$$

$$= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n\geq 1} \Big(a_n(f)cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) \Big).$$

(avec les coefficients réels)

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire, 2π-périodique, telle que $f(0) = f(\pi) = 0$ et $f(t) = 1$ si $0 < t < \pi$

Il est clair que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Comme f est impaire, $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sin(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\Big(1-(-1)^n\Big) \end{aligned}$$

On a $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \dfrac{4}{(2p+1)\pi}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. D'où

$$SF(f)(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)x$$

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que l'on suppose continue par morceaux, et 2π-périodique.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a défini la série de Fourier $SF_f(x)$.
La première question qui se pose est de savoir si cette série est convergente, pour certaines valeurs de x, voire pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Si c'est le cas, elle définit une nouvelle application $SF_f : x \to SF_f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et la seconde question qui se pose est celle des liens entre cette application SF et l'application f de départ.

Notation

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique.
En tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f admet donc une limite à droite notée $f(x^+)$ et une limite à gauche notée $f(x^-)$. Dans le cas où x est un point de continuité de la fonction f, on a par définition de la continuité : $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$.

Théorème 2.4 : théorème de Dirichlet

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, et 2π-périodique. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f en x est convergente, et l'on a

$$SF_f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x^+) + f(x^-)\Big)$$

(ii) en particulier, en tout $x \in \mathbb{R}$ où f est continue, on a :

$$SF_f(x) = f(x).$$

Ainsi, sous les hypothèses du théorème, la série de fonctions SF_f converge simplement sur $\mathbb{R}$. On peut montrer que :

Corollaire 2.5

Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, si l'on suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la série de fonctions SF_f converge vers f normalement (et donc uniformément) sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.6 : Formule de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Alors

(i) la série de réels positifs $\sum_n \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \right)$ est convergente, et

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

(ii) lorsque f est à valeurs réelles, la série de réels positifs $\sum_n \left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2 \right)$ est convergente, et

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt.$$

L'égalité de Parseval entraîne qu'une fonction continue 2π-périodique qui a tout ses coefficients de Fourier nuls est nulle.

Plan

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \text{ sur } [-\pi, \pi].$$

Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire les valeurs de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

La fonction f est paire. Les coefficients $bn(f)$ sont donc nuls. Et,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[x-\frac{x^3}{3\pi^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{3}$$

En faisant une double intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cos(nx)dx = -\frac{2}{\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos(nx)dx \\ &= (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

La fonction f est continue et C^1 par morceaux. Sa série de Fourier converge donc simplement et même uniformément vers f, d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) \\ 1-\frac{x^2}{\pi^2} &= \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

En faisant $x = \pi$, on trouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

En faisant $x = 0$, on trouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

En utilisant l'égalité de Parseval, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$