

Intégrales Généralisées

ESSOH Modeste

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA
UFR SFA

17 février 2017

Plan

- 1 Introduction et définition première
 - Le cas $-\infty < a < b \leq +\infty$
 - Le cas $-\infty \leq a < b < \infty$
 - Le cas $-\infty \leq a < b \leq \infty$
- 2 Intégrales généralisées des fonctions positives
- 3 Intégrale de fonctions de signe non constant

Introduction :

Nous avons rappelé dans la section précédente la construction et des propriétés de l'intégrale de Riemann d'une fonction bornée définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$.

La question naturelle qui surgit est celle de l'intégration d'une fonction (non nécessairement bornée) sur un intervalle non fermé ou borné de \mathbb{R} . Nous consacrons le présent chapitre à l'étude de ce type d'intégrales appelées intégrales généralisées. Nous supposerons dans cette section que :

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

Soit f localement intégrable sur $[a, b[$. On lui associe l'application $F : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad (1)$$

Définition 1

Si $F(x)$ admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on dit que *l'intégrale*

généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est *convergente* et on lui

attribue la valeur ℓ et on écrit

$$\int_a^b f(t)dt = \ell = \lim_{x \rightarrow b} F(x).$$

Définition 2

Si $F(x)$ n'admet pas de limite ou tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on dit

que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est *divergente*.

REMARQUE : Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$.

- L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est aussi appelée intégrale impropre et b est sa borne impropre.

- Comme le problème de la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ revient à l'étude d'une limite, deux aspects apparaissent donc : celui de l'existence (convergence) de l'intégrale et sa valeur s'il y a lieu.
- Soit $c \in [a, b[$. Par l'égalité de Chasles, on a

$$F(x) = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt.$$

L'intégrale $\int_a^c f(t)dt$ étant une constante, les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$

sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.) Et en cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Exemple :

- 1) La fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos t$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc y est localement intégrable. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$F(x) = \int_0^x \cos t \, dt = \sin x.$$

$\sin x$ n'admettant pas de limite lorsque $x \rightarrow \infty$,
donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \cos t \, dt$ est
divergente.

- 2) La fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc y est localement intégrable. Pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$,

donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente et on

$$a : \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1.$$

- 3) La fonction $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ n'est pas bornée sur l'intervalle $[0, 1[$. Cependant elle est continue sur $[0, 1[$ donc y est localement intégrable. Pour tout $x \in [0, 1[$ on a

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin t]_0^x = \arcsin x.$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge et on

$$a \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

De façon similaire, dans ce cas, on associe à toute fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable sur la fonction $F :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_x^b f(t) dt. \quad (2)$$

Si $F(x)$ admet la limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a (par valeurs supérieures), on dit que *l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t) dt$ est *convergente* et on lui attribue la valeur ℓ et on écrit

$$\int_a^b f(t) dt = \ell = \lim_{x \rightarrow a} F(x).$$

Par contre, si $F(x)$ n'admet pas de limite ou tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers a (par valeurs supérieures), on dit que l'intégrale généralisée

$\int_a^b f(t)dt$ est *divergente*.

En fait le changement variable $u = -t$ montre que

$$\int_x^b f(t)dt = \int_{-b}^{-x} f(-t)dt$$

les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_{-b}^{-a} f(-t)dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

De ce fait tous les résultats de convergence que nous allons établir pour $-\infty < a < b \leq +\infty$ s'adaptent au cas $-\infty \leq a < b < \infty$ par de légères modifications.

Exemples :

- 1 La fonction $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0, 1]$ donc y est localement intégrable. Pour tout $x \in]0, 1]$ on a

$$F(x) = \int_x^1 \ln t \, dt = x - x \ln x - 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x - 1) = -1$,

donc l'intégrale $\int_0^1 \ln t \, dt$ est convergente et on

$$a \int_0^1 \ln t \, dt = -1.$$

- 2 La fonction $f :]-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ n'est pas bornée sur l'intervalle $] - 1, 0]$.
Cependant elle est continue sur $] - 1, 0]$ donc y est localement intégrable. Pour tout $x \in] - 1, 0]$ on a

$$F(x) = \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = [2\sqrt{1+t}]_x^0 = 2 - 2\sqrt{1+x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2 - 2\sqrt{1+x}) = 2$.

Donc l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt$ converge et on a

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = 2.$$

Définition 3

Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle ouvert $]a, b[$ de \mathbb{R} . On dit que l'intégrale

$\int_a^b f(t)dt$ est convergente si, pour tout nombre

$c \in]a, b[$, chacune des intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et

$\int_c^b f(t)dt$ est convergente. On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Proposition 4

Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle ouvert $]a, b[$ de \mathbb{R} . L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si, il existe $c \in]a, b[$, telle que chacune des intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ est convergente.

On voit clairement que tous les résultats de convergence de ce troisième type d'intégrale généralisée se déduisent de ceux du cas pour $-\infty < a \leq b < +\infty$.

Exemple : Intégrales de Riemann

Proposition 5 (Intégrales de Riemann)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

① L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

② L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

③ L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge toujours.

Les intégrales du type $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ ou $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont dites de Riemann.

Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 6

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a, b[$ dans \mathbb{R} telles que les intégrales

$\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ convergent. Alors pour

tous réels α et β , l'intégrale $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ est convergente et on a

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

REMARQUE :

- Si les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de nature différente (l'une converge et l'autre diverge) alors l'intégrale $\int_a^b (f(x) + g(x))dx$ diverge.
- Par contre l'intégrale $\int_a^b (f(x) + g(x))dx$ peut converger alors que $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ divergent toutes les deux.

Proposition 7

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a, b[$ dans \mathbb{R} telles que les intégrales

$\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ convergent.

Si pour tout $x \in [a, b[$ $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

En particulier si pour tout $x \in [a, b[$ $f(x) \geq 0$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Critère de Cauchy

Théorème 8

Soient f une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a, b[$.

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall u, v \in [c, b[, \left| \int_u^v f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Intégrale absolument convergente

Définition 9

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ est absolument convergente si et seulement si

$\int_a^b |f(x)| dx$ est convergente.

Théorème 10

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$.

Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente, alors est convergente et on a

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Remarque : Il existe des intégrales généralisées convergentes mais qui ne convergent absolument, de telles intégrales sont dites semi-convergentes.

Plan

- 1 Introduction et définition première
- 2 Intégrales généralisées des fonctions positives
 - Des critères de convergence
- 3 Intégrale de fonctions de signe non constant

Proposition 11

Soit f une fonction localement intégrable et positive sur $[a, b[$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si et seulement si la fonction F définie sur $[a, b[$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b[$$

est majorée sur $[a, b[$

Théorème 12 (Critère de comparaison)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables et positives sur un intervalle $[a, b[$ telles que pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) \leq g(x)$. On a

- Si $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge.
- Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

Exemple : • L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ converge.

- L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx$ diverge.

Corollaire 13 (Critère d'équivalence)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables et positives sur un intervalle $[a, b[$. On a

• Si $f = O_b(g)$ et si $\int_a^b g(x) dx$ converge alors

$\int_a^b f(x) dx$ converge.

• Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors les intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et

$\int_a^b g(x) dx$ sont de même nature.

Exemple : • L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^2}} dx$
converge.

Corollaire 14 (1^{ère} Règle de Riemann : $b < \infty$)

Soient f une fonction localement intégrable et positive sur un intervalle $[a, b[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)^\alpha f(x) = \ell.$$

• Si $\ell \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ alors les intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et

$\int_a^b \frac{1}{(b - x)^\alpha} dx$ sont de même nature.

• Si $\ell = 0$ et $\alpha < 1$ alors $\int_a^b f(x) dx$ converge.

• Si $\ell = +\infty$ et $\alpha \geq 1$ alors $\int_a^b f(x) dx$ diverge.

Corollaire 15 (2^{ème} Règle de Riemann : $b = +\infty$)

Soient f une fonction localement intégrable et positive sur un intervalle $[a, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = \ell.$$

• Si $\ell \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ sont de même nature.

• Si $\ell = 0$ et $\alpha > 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

• Si $\ell = +\infty$ et $\alpha \leq 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Exemples : Intégrales de référence

1 L'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est

convergente et on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

2 L'intégrale de Bertrand $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$
converge si et seulement si

$(\alpha > 1$ et β quelconque dans \mathbb{R}) ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

3 L'intégrale de Bertrand $\int_0^{1/e} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} dt$
converge si et seulement si

$(\alpha < 1$ et β quelconque dans \mathbb{R}) ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Plan

- 1 Introduction et définition première
- 2 Intégrales généralisées des fonctions positives
- 3 Intégrale de fonctions de signe non constant
 - Intégrale semi-convergent
 - Changement de variable
 - Intégration par partie

Théorème 16 (Lemme d'Abel)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- f est positive, décroissante sur $[a, b[$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$,
- il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout

$$u \in [a, b[, \left| \int_a^u g(x) dx \right| \leq M.$$

Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est convergente.

Le lemme d'Abel permet de montrer la convergence de certaines intégrales non absolument convergentes.

Exemple :

l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est une intégrale semi-convergente.

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

- Pour tout $u \in [1, +\infty[$,

$$\left| \int_1^u \sin x dx \right| = |\cos 1 - \cos u| \leq |\cos 1| + |\cos u| \leq 2$$

- D'après le lemme d'Abel $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

- À l'aide d'une intégration par partie, on peut montrer que $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ diverge.

Exercice :

Etudier la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

Théorème 17

Soient f une fonction localement intégrable sur un intervalle I , φ une fonction strictement croissante et de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b[$ telle que $\varphi([a, b[) \subset I$.

Alors les intégrales $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$ et

$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ sont de même nature. De plus, si elles convergent, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Théorème 18

Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b[$ telles que la fonction $x \mapsto f(x)g(x)$ possède une limite (à gauche) en b . Alors les deux intégrales

généralisées $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ et $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ sont de même nature. De plus, si elles convergent, on a

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Exercice : Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et les calculer :

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$2) \int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}} dt$$