<u>*Université Oum El Bouaghi*</u> **2024/2025**

Mathématiques L2 (Semestre3)

Examen Analyse 3

13/01/2025(Durée : 1h30mn)

Exercice 1. (06 pts) (3+3)

Etudier la nature des séries numériques suivantes:

$$1/\ \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n\alpha}, \qquad 2/\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\alpha n^3}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice 2. (08pts) (1+2+2+2+1)

Soit la série de fonction de terme général:

$$f_n(x) = \frac{\arctan\left(x^{n+1}\right)}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x \geq 0.$$

1/ Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = \arctan(x) \Leftrightarrow \tan(y) = x$ et $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

2/ On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. En déduire que S est continue sur $[0, +\infty[$.

3/ Etablir que:

$$\forall x > 0, \quad S(x) + S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Indication: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

4/ Montrer que S est dérivable sur $[0, 1[$.

5/ En déduire que S est croissante sur $[0, 1[$ et déterminer $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} S'(x)$.

Exercice 3. (06 pts) (2+1+3)

Soit la série entière suivante:

$$S(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$$

1/ Déterminer le rayon de convergence R.

2/ En déduire le domaine de convergence D_C.

3/ Calculer la somme $S(x)$.

Bon courage

2024/2025 Corrigé type de l'examen Analyse 3 (S_3).

L2 Maths

EXo1 : (06pts) : 1) nature de la série : $\sum_{n\geq 1} n e^{-n\alpha}$.

d'après critère de Cauchy : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n e^{-n\alpha}}$ (1) $= \lim_{n\to+\infty} n^{1/n} e^{-\alpha} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} \cdot e^{-\alpha} =$

$e^{-\alpha}$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

- Si $\alpha<0 \Rightarrow e^{-\alpha} > 1$; la série diverge (1)
- Si $\alpha>0 \Rightarrow e^{-\alpha} < 1$; la série converge (1)
- Si $\alpha=0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} n$ diverge car $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ (0,5)

2) nature de la série : $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{1+\alpha n^3}$

- Si $\alpha\neq 0$; $\frac{\sqrt{n}}{1+\alpha n^3} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\alpha n^3} = \frac{1}{\alpha n^{5/2}}$ (2)

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{5/2}}$ Converge (Série de Riemann $\alpha = 5/2 > 1$) ;

d'après critère de Comparaison $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{1+\alpha n^3}$ Converge.

- Si $\alpha=0$; $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}$ diverge car $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. (1)

EXo2 : (08pts)

1) on sait que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg}(x) \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{arctg}(x^{n+1})}{n(n+1)} \leq \frac{\pi}{2(n)(n+1)} \leq \frac{\pi}{2n^2} \quad (1)$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ Converge (Série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), alors

$\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ normalement Convergente sur $[0,+\infty[$.

2) Comme f_n continue sur $[0,+\infty[$ et $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ normalement Convergente donc Uniformément Convergente sur $[0,+\infty[$, alors d'après théorème de continuité pour les séries de fonctions

$S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2

3) on a : $\forall x \in]0,+\infty[$; $S(x) + S(\frac{1}{x}) = \sum_{n\geq 1} \left[\frac{\operatorname{arctg}(x^{n+1})}{n(n+1)} + \frac{\operatorname{arctg}(\frac{1}{x^{n+1}})}{n(n+1)} \right]$

$= \sum_{n\geq 1} \left[\operatorname{arctg}(x^{n+1}) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \right] \frac{1}{n(n+1)}$

$= \sum_{n\geq 1} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)$. D'autre part, on sait que :

2

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

donc $S(x) + S(\frac{1}{x}) = \sum_{n\geq 1} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{\pi}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi}{2}$.

4) pour montrer que S est dérivable sur $[0,1[$ il suffit de montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ uniformément convergente sur ~~[illegible]~~ tout $[0,a] \subset [0,1[$. (d'après théorème de dérivation).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[$ on a :

$f_n'(x) = \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{(n+1)x^n}{1 + x^{2(n+1)}} \right) = \frac{x^n}{n(1 + x^{2n+2})}$

Soit $a \in [0,1[$ fixé, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0,a[$:

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{x^n}{n(1+x^{2n+2})}\right| \leq \frac{x^n}{n} \leq x^n \leq a^n$$

Comme $\sum_{n\geq 1} a^n$ Converge (Série géométrique $a<1$) donc 2

$\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ normalement Convergente donc uniformément Convergente sur $[0,a]$. D'après théorème de dérivation des séries de fonctions, la fonction S est dérivable sur $[0,1[$.

5) on a, $\forall x \in [0,1[$; $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(1+x^{2n+2})}$; 0,5

$S'(0) = 0$ donc $\forall x \in [0,1[$: $S'(x) \geq 0$ (S est croissante).

on a : $\forall x \in [0,1[$: $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(1+x^{2n+2})} \geq \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2n} = -\frac{1}{2}\ln(1-x)$

Comme : $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} \left[-\frac{1}{2}\ln(1-x)\right] = +\infty$ alors $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} S'(x) = +\infty$. 0,5

Exo3 : (06pts)

1) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right| = 1 \Rightarrow R = 1$ 1,5

2) $D_c =]-R, R[=]-1,1[$.

• pour $x=-1$: $\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n n^2}{(n-1)(n-2)}$ diverge car $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n-1)(n-2)} \neq 0$ 1,5

• pour $x=1$: $\sum_{n\geq 3} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}$ diverge car $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} = 1 \neq 0$

3) ma : $\dfrac{n^2}{(n-1)(n-2)} = a + \dfrac{b}{n-1} + \dfrac{c}{n-2} = \dfrac{an^2-an+bn-2an+2a-2b+cn-}{(n-1)(n-2)}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases}$ alors :

3

$\forall x \in D_c$: $S(x) = \sum_{n\geq 3} \dfrac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n = \sum_{n\geq 3} \left(1 - \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{4}{n-2}\right) x^n$

$= \sum_{n\geq 3} x^n - \sum_{n\geq 3} \dfrac{x^n}{n-1} + 4\sum_{n\geq 3} \dfrac{x^n}{n-2} = \dfrac{x^3}{1-x} - x\sum_{n\geq 3} \dfrac{x^{n-1}}{n-1} + 4x^2 \sum_{n\geq 3} \dfrac{x^{n-2}}{n-2}$

$= \dfrac{x^3}{1-x} - x\left(-\ln(1-x) - x\right) + 4x^2\left(-\ln(1-x)\right) = \dfrac{x^2}{1-x} + x(1-4x)\ln(1-x).$

$\Rightarrow S(x) = \dfrac{x^2}{1-x} + x(1-4x)\ln(1-x).$