Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2024/2025

2ème année MATH- Semestre 1

Examen final : Analyse 3

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (4 Pts)

Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$, la nature de la série numérique suivante

$$\sum \alpha^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Exercice 2. (6 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3 - n}.$$

1) Déterminer le rayon de convergence R.
2) En déduire le domaine de convergence.
3) Calculer la somme de la série entière f.
4) En déduire la somme des séries numériques suivantes

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 - n} = ?, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 - n} = ?$$

Exercice 3. (6 Pts)

Soit f une fonction $2\pi-$ périodique, impaire définie par

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

1) Tracer le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$.
2) Déterminer la série de Fourier associée à f, notée S_f.
3) En déduire la somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = ?, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = ?$$

Exercice 4. (4 Pts)

Etudier la nature de l'intégrale impropre suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$$

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2024/2025

$2^{ème}$ année M.I - Semestre 1
Corrigé de l'examen final : Analyse 3
Durée : 1h30mn

Exercice 1. (4 Pts)

On applique le critère de Cauchy.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\alpha\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \textbf{(0.25Pt)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\alpha e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\alpha e^{n\ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\alpha e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\alpha}{e} \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

puisque

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\sim\frac{-n}{n+1}\to-1 \quad \text{quand} \quad n\to+\infty. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Donc,

si $\frac{\alpha}{e}<1\Leftrightarrow\alpha<e$ alors la série converge. **(0.5 Pt)**

Si $\frac{\alpha}{e}>1\Leftrightarrow\alpha>e$ alors la série diverge. **(0.5 Pt)**

Pour $\alpha=e$, on obtient la série $\sum e^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

On remarque que

$$\lim_{n\to+\infty}e^n e^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = \lim_{n\to+\infty}e^n e^{-n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}e^n e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}e^{n-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{1/2}\neq 0. \quad \textbf{(1.5Pts)}$$

Ainsi, pour $\alpha=e$, la série diverge. **(0.25 Pt)**

Exercice 2. (6 Pts)

On a $\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n^3-n}$.

1) Le rayon de convergence R est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^3-(n+1)}.\frac{n^3-n}{1}\right| = 1 \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

2) Si $|x|<1$, alors la série converge.

Si $|x|>1$, alors la série diverge.

Si $|x|=1$, alors soit $x=1$ ou $x=-1$.

• Pour $x=1$, on a la série numérique $\sum\frac{1}{n^3-n}$ qui converge car $\frac{1}{n^3-n}\sim\frac{1}{n^3}$ où $\sum\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente.**(0.5 Pt)**

• Pour $x=-1$, on a la série numérique $\sum\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ qui converge par le critère de Leibniz.**(0.5 Pt)**

Ainsi, le domaine de convergence est $D=[-1,1]$. **(0,5 Pt)**

3) La somme :
Pour $x = 0$, on a $f(0) = 0$.
Pour $x \neq 0$, on remarque que

$$\frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1} + \frac{c}{n+1}.$$

Par identification, $a = -1, \quad b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$.
Ainsi,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3 - n} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$= -\left(-\ln(1-x) - x\right) + \frac{x}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= -\left(-\ln(1-x) - x\right) + \frac{x}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m} + \frac{1}{2x}\sum_{m=3}^{+\infty} \frac{x^m}{m}$$

$$= -\left(-\ln(1-x) - x\right) - \frac{x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\left[-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{(x-1)}{2x}\right](1-x)\ln(1-x) + \frac{3x}{4} - \frac{1}{2}. \quad (\mathbf{3Pts})$$

4) Pour $x = 1$, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 - n} = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

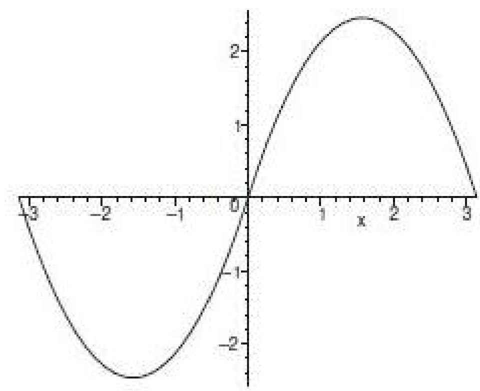
$$= \lim_{x \to 1^-} \left[\frac{(x-1)}{2x}\right](1-x)\ln(1-x) + \frac{3x}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Pour $x = -1$, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 - n} = \lim_{x \to (-1)^+} f(x)$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} \left[\frac{(x-1)}{2x}\right](1-x)\ln(1-x) + \frac{3x}{4} - \frac{1}{2} = 2\ln(2) - \frac{5}{4}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Exercice 3. (6 Pts)
1) Le graphe de f est **(0.5 Pt)**



2) Puisque f est impaire, alors $a_n = 0, \quad \forall n \geq 0.$ **(0.25 Pt)** Donc,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)dx. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

Aussi, en ulitilsant une série d'intérgation par parties, on obtient

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x(\pi - x)\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos(nx)dx\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\left[\frac{(\pi - 2x)\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{4}{\pi n^3}\left[-\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}\left[-\cos(n\pi) + 1\right]$$

$$= \frac{4}{\pi n^3}\left[1 - (-1)^n\right]. \quad (\mathbf{2Pts})$$

Donc, si n est pair, alors $b_{2n} = 0$ et si n est impair, alors $b_{2n+1} = \frac{8}{\pi(2n+1)^3}$ **(0.5 Pt)**
Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) On remplace $x = \frac{\pi}{2}$, alors on obtient

$$S_f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Pour la deuxième somme, on utilise l'égalité de Parseval. On a

$$\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2 dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2(\pi^2 + x^2 - 2\pi x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi^2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - 2\pi\frac{x^4}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{30}\pi^4.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}. \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

Exercice 4. (4 Pts)

On remarque que $\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}.$ **(0.5 Pt)**
Ainsi,

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad \frac{\arctan(x)}{1 + x^2} \leq \frac{\pi/2}{1 + x^2}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Sachant que

$$\frac{1}{1 + x^2} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{au voisinage de} \quad +\infty \quad (\mathbf{1Pt})$$

et $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge (l'exposant est supérieur à 1) **(1 Pt)**, alors par le critère de comparaison $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$ converge. **(1 Pt)**