

Examen du 1ere Semestre

**Exercice 1**

1. Soit la suite numérique suivante :

$$U_n = \frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)}.$$

- Etudier la nature de  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$
- Calculer la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)} \right)$

2. Etablir une comparaison avec une intégrale

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k} \sim \frac{(\ln n)^2}{2}$$

**Exercice 2**

On considère les fonctions  $f_n$  définies de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = e^{-nx}$

- Déterminer  $D$  l'ensemble de convergence de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- préciser la limite simple  $f$  de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $D$ .
- La convergence est-elle uniforme vers  $f$  sur  $D$ .

**Exercice 3**

On considère la série de fonction  $\sum f_n$  définie par :  $f_n(x) = \frac{x^n}{3^n} \cos(n\pi x^2)$ .

- Déterminer le domaine de convergence iniforme de la série  $\sum f_n$ .
- On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Exercice 4**

Etudier la nature de l'intégrale impropre suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx$$

Correction de l'Examen du 1ere Semestre

**Exercice 1**

1. Soit la suite numérique suivante :

$$U_n = \frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)}.$$

- Etude de la nature de  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ; on a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)}$  est convergente car est une somme de deux séries convergentes.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$  est une série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$  est de même nature que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$  qui est une série de Riemann.

- Calculons la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)})$ ; on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \frac{2}{n+1}) = 2.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)}) = 5.$$

2. Etablir une comparaison avec une intégrale; soit la fonction  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x \in ]0, +\infty[$ .  $f$  est croissante sur  $]0, e[$  et décroissante sur  $]e, +\infty[$ . Alors pour  $n \leq x \leq n+1$  on a  $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$  pour  $n \geq 3$ , on intégrant de  $n$  à  $n+1$ , on obtient que

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln n}{n},$$

par récurrence on trouve

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx \leq \sum_{k=3}^{n-1} f(k),$$

alors

$$\sum_{k=3}^n f(k) - f(3) \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx \leq \sum_{k=3}^n f(k) - f(n)$$

on déduit

$$\int_3^n \frac{\ln x}{x} dx + f(n) \leq \sum_{k=3}^n f(k) \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx + f(3),$$

de plus on a

$$\int_3^n \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2},$$

alors, on obtient

$$\frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \frac{\ln n}{n} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k} \leq \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \frac{\ln 3}{3},$$

d'où

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k}}{\frac{(\ln n)^2}{2}} \leq 1$$

## Exercice 2

On considère les fonctions  $f_n$  définies de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = e^{-nx}$

- On détermine  $D$  l'ensemble de convergence de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $D = [0, +\infty[$ , en effet

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 1 \\ 0, & x > 0 \\ +\infty, & x < 0. \end{cases}$$

- La limite simple  $f$  de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $D$  est la fonction définie par

$$\begin{cases} 1, & \text{si } x = 1 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

- Puisque  $f$  n'est pas continue sur  $D$ , alors la convergence n'est pas uniforme.

## Exercice 3

On considère la série de fonction  $\sum f_n$  définie par :  $f_n(x) = \frac{x^n}{3^n} \cos(n\pi x^2)$ .

- Etudions la convergence uniforme :

- Si  $|x| < a$  avec  $0 < a < 3$  on a  $|f_n(x)| \leq \left(\frac{a}{3}\right)^n = u_n$ .  $\sum u_n$  est une série géométrique convergente, alors la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[-a, a]$  avec  $0 < a < 3$ .
- Si  $|x| \geq 3$ , le terme général  $f_n(x)$  ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, alors la série  $\sum f_n$  est divergente.

- On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ . Pour tout  $x \in [-a, a]$  avec  $0 < a < 3$  et  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $f_n$  sont continues et la série  $\sum f_n$  converge uniformément donc sa somme est une fonction continue sur  $[-a, a]$  avec  $0 < a < 3$ . On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos(n\pi x^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n}{3^n} \cos(n\pi x^2) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

#### Exercice 4

On remarque que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx$  est impropre en  $+\infty$  et en 0.

Posons

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx$$

Pour  $I_1$ , on sait que  $\sin(x) \sim_0 x$ . Donc,

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(x^2+1)} \sim \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}.$$

Puisque  $\int_0^1 \sqrt{x} dx$  converge alors  $I_1$  converge par le critère d'équivalence.

Pour  $I_2$ , on remarque que

$$\left| \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(x^2+1)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)} \sim \frac{x}{\sqrt{x}(x^2+1)} \sim \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$$

sachant que  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}$  converge, alors  $I_2$  converge. Ainsi  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx$