Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2024/2025

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

2ème année MATH- Semestre 1

Examen de rattrapage : Analyse 3

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (5 Pts)

I)Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(1+\sqrt{n})}$$

est semi-convergente.

II) Suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, discuter la nature de la série numérique suivante

$$\sum \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$$

Exercice 2. (5 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^{n+2}}{n^2-1}.$$

1) Déterminer le rayon de convergence R.
2) En déduire le domaine de convergence D_f.
3) Pour $x \in D_f$, calculer la somme de la série entière f.
4) En déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{2^{n-1}(n^2-1)}.$$

Exercice 3. (7 Pts)

1) Soit f une fonction $2\pi-$ périodique, définie par

$$f(x) = \frac{1}{\pi^4}(x^2-\pi^2)^2, \qquad \text{pour} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

1) Tracer le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$.
2) Déterminer la série de Fourier associée à f, notée S_f.
3) En déduire la somme de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} =?$$

Exercice 4. (3 Pts)

Étudier la nature de l'intégrale impropre suivante

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}} dx$$

$2^{\text{ème}}$ année MATH - Semestre 1

Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 3

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (5 Pts)

I) Remarquons que $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. En effet, on a

$$\sqrt{n}|u_n| = \frac{\sqrt{n}}{\ln(1+\sqrt{n})} \to +\infty \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Donc, il existe N tel que

$$\begin{aligned} n \geq N &\Rightarrow \sqrt{n}|u_n| \geq 1 \\ &\Rightarrow |u_n| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Sachant que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Rieman), alors par le critère de comparaison $\sum |u_n|$ diverge. **(1 Pt)**

D'autre part, si on pose $f(t) = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{t})}$. Alors,

$$f'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}.\frac{1}{\ln^2(1+\sqrt{t})} < 0.$$

Donc, (u_n) est décroissante et de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Ainsi, par le critère de Leibniz, $\sum u_n$ est convergente. **(1.5 Pt)** Donc, $\sum u_n$ est semi-convergente.

II) On pose $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^\alpha}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{(n!)^\alpha} = (n+1)^{\alpha-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= (n+1)^{\alpha-1}e^{n\ln(\frac{n}{n+1})} = (n+1)^{\alpha-1}e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

Par le critère d'Alembert, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^{\alpha-1}e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})}.$$

Puisque $\ln(1-\frac{1}{n+1}) \sim -\frac{1}{n+1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{n}{n+1}} = e^{-1}$.

Ainsi, si $\alpha < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ et la série converge. **(0.5 Pt)**

Si $\alpha = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1$ et la série converge. **(0.5 Pt)**

Si $\alpha > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ et la série diverge. **(0.5 Pt)**

Exercice 2. (5 Pts)

1) Par le critère de D'alembert, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+3}}{(n+1)^2-1}.\frac{n^2-1}{|x|^{n+2}} = |x|.$$

Si $|x| < 1$, alors lasérie entière converge.
Si $|x| > 1$, alors la série diverge.
Donc, le rayon de convergence $R = 1$. **(1 Pt)**

2) Si $x = 1$, on a $\sum \frac{1}{n^2-1}$ qui converge car $\frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann).
Si $x = -1$, on a $\sum \frac{(-1)^n}{n^2-1}$ qui converge par le critère de Leibniz.
Ainsi, $D_f = [-1, +1]$. **(1 Pt)**

3) La somme :
Si $x = 0$, alors $f(0) = 0$.
Si $x \neq 0$, alors on remarque que

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right].$$

Donc,

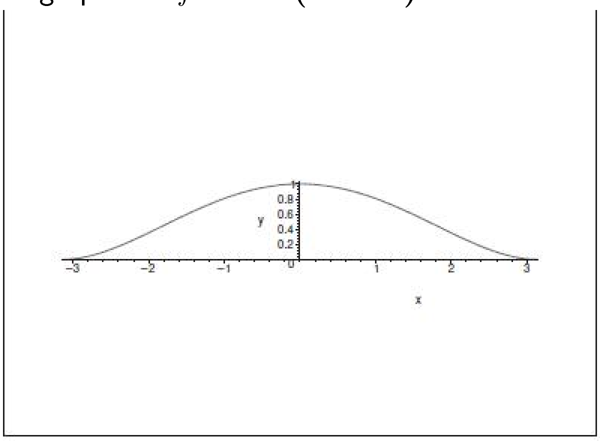
$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2} \frac{x^{n+2}}{n^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{x^{n+2}}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{x^{n+2}}{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n+3}}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 3}\frac{x^{n+1}}{n} \\ &= \frac{1}{2}x^3\ln(1-x) - \frac{x}{2}\left[\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right] \quad (\mathbf{2.5Pts})\end{aligned}$$

4) On pose $x = \frac{1}{2}$, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2}\frac{(1/2)^{n+2}}{n^2-1} &= \frac{1}{8}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{2^{n-1}(n^2-1)} = f(\frac{1}{2}) \\ &= -\frac{1}{4}\ln(2) + \frac{5}{32}. \quad (\mathbf{0.5Pt})\end{aligned}$$

Exercice 3. (7 Pts)

1) Le graphe de f est : **(0.5 Pt)**



2) On remarque que f est paire, donc $b_n = 0$. $\quad$ **(0.5 Pt)** Ainsi, calculons a_0 et a_n.

On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi^4}(x^2-\pi^2)^2\,dx = \frac{2}{\pi^5}\int_0^{\pi}\left(x^4 - 2\pi^2x^2+\pi^4\right)dt \\ &= \frac{2}{\pi^5}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}\pi^2x^3 + \pi^4 x\right]_0^{\pi} = 2\left\{\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right\} = \frac{16}{15} \quad \textbf{(1Pt)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi^4}(x^2-\pi^2)^2\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi^5}\int_0^{\pi}(x^2-\pi^2)^2\cos(nt)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi^5}\left[(x^2-\pi^2)^2\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi^5}\cdot\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x(x^2-\pi^2)\sin(nx)\,dx \\ &= 0 + \frac{8}{\pi^5}\cdot\frac{1}{n}\left[x(x^2-\pi^2)\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{8}{\pi^5}\cdot\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}(3x^2-\pi^2)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{8}{\pi^5}\cdot\frac{1}{n^3}\left[(3x^2-\pi^2)\sin(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{48}{\pi^5}\cdot\frac{1}{n^4}\int_0^{\pi}x\sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{48}{\pi^5}\cdot\frac{1}{n^4}\left[x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{48}{\pi^5}\cdot\frac{1}{n^4}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{48}{\pi^5}\cdot\frac{1}{n^4}\left(-(-1)^n\cdot\pi+0\right) = \frac{48}{\pi^4}\cdot\frac{1}{n^4}(-1)^{n-1} \quad \textbf{(3Pt)} \end{aligned}$$

Ainsi la série de Fourier associée à f est

$$f(t) = \frac{8}{15} + \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\cos(nx), \quad x\in\mathbb{R}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

3) On remplace $x=\pi$, on obtient

$$0 = f(\pi) = \frac{8}{15} + \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\cos n\pi = \frac{8}{15} - \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{48}\cdot\frac{8}{15} = \frac{\pi^4}{90}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

Exercice 4. (3 Pts)

On remarque qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x\sqrt{x}}. \quad \textbf{(1.5Pts)}$$

Puisque $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$ converge (l'expsoant est $3/2>1$,) $\;$ **(1 Pt)** alors par le critère d'équivalence $\int_1^{+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}dx$ $\quad$ **(0.5 Pt)**