Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

2ème année MATH- Semestre 1

Examen final : Analyse 3

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (3 Pts)

Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$, la nature de la série numérique suivante

$$\sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos(n^{-\alpha})\right)$$

Exercice 2. (5 Pts)

On considère la série de fonction de terme général

$$u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}, \quad x \in [0,1], \quad n \geq 1.$$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $[0,1]$.

2) On pose $S(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$.

a) Montrer que S est dérivable sur $[0,1]$.

b) Calculer $S'(1)$.

Exercice 3. (6 Pts)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E)\begin{cases} (1+x^2)y'' + 6xy' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

On note $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, une série entière dont le rayon de convergence $R > 0$.

1) Calculer les coefficients a_0 et a_1.

2) Trouver la relation de récurrence liant les coefficients a_n.

3) En déduire la solution de l'équation différentielle (E).

Exercice 4. (6 Pts)

Soit f une fonction $2\pi-$ périodique définie par

$$f(x) = |x|^3, \qquad \text{pour} \quad -\pi < x \leq \pi.$$

1) Tracer le graphe de f sur au moins deux périodes.

2) Déterminer la série de Fourier associée à f, notée S_f.

3) Etudier la nature de S_f sur $\mathbb{R}$.

4) Sachant que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, en déduire la somme de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

$2^{ème}$ année M.I - Semestre 1

Corrigé de l'examen final : Analyse 3

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (3 Pts)

On remarque qu'au voisinage de 0, on a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc pour $\alpha > 0$, on a

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right). \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Ainsi, on obtient

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Si $2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$, alors $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge (série de Rieaman) et par le critère d'équivalence $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$ converge. **(1 Pt)**

Si $2\alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}$, alors $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ diverge (série de Rieaman) et par le critère d'équivalence $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$ diverge. **(1 Pt)**

Exercice 2. (5 Pts)

1) Si $x = 0$, alors $\sum u_n(0)$ converge. **(0.25 Pt)**

Si $x \neq 0$, alors on peut remarquer que le DL de $u_n(x)$ est

$$u_n(x) = -\frac{x^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}). \quad \textbf{(1Pt)}$$

Alors, $|u_n(x)| \sim \frac{x^2}{2n^2}$, **(0.5 Pt)** or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et donc par le critère d'équivalence $\sum u_n(x)$ converge absolument, càd simplement sur $[0, 1]$. **(0.5 Pt)**

2) a) On peut remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x)$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ **(0.25 Pt)** et $\forall x \in [0, 1]$,

$$u_n'(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1], \quad |u_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et donc $\sum u_n'(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$. Ainsi, S est dérivable sur $[0, 1]$. **(0.5 Pt)**

b) On remarque que

$$S'(1) = \sum_{n\geq 1} u_n'(1) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = -1. \quad \textbf{(1Pt)}$$

Exercice 3. (6 Pts)

1) On remarque facilement que $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$ et donc d'après les conditions de l'équation (E), on a $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. **(0.5 Pt)**

2) Posons $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on a donc $y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}$.

En remplaçant dans (E), on obtient

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n\geq 1} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geq 1} 6na_n x^n + \sum_{n\geq 0} 6a_n x^n = 0 \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n\geq 0}(n^2+5n+6)a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)(n+3)a_n\right)x^n = 0.$$

Il s'en suit que

$$\forall n \geq 0, \qquad (n+1)a_{n+2} + (n+3)a_n = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = \frac{-(n+3)}{n+1}a_n. \quad (\mathbf{1Pt})$$

3) On remarque que pour $a_1 = 0$, on a $a_3 = 0, \ldots$ et par récurrence, $a_{2p+1} = 0$ pour $p \geq 0$. **(0.5 Pt)**

D'autre part, pour $a_0 = 1$, on a $a_2 = -3$, $a_4 = 5, \ldots$ et par récurrence, on a $a_{2p} = (-1)^p(2p+1)$. **(1 Pt)**

Ainsi,

$$y(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$$

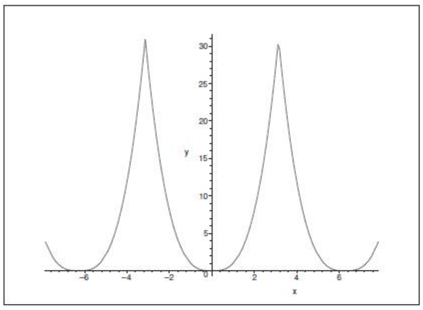
$$= 2\sum_{n\geq 0} n(-x^2)^n + \sum_{n\geq 0}(-x^2)^n$$

$$= -2x^2\sum_{n\geq 1} n(-x^2)^{n-1} + \frac{1}{1+x^2} \quad (\mathbf{1Pt})$$

$$= \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}. \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

Exercice 4. (6 Pts)

1) Le graphe de f est **(0.5 Pt)**



2) Puisque f est paire, alors $b_n = 0, \quad \forall n \geq 1.$ $\quad$ **(0.25 Pt)** Donc,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{2}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

Aussi, en ulitilsant une série d'intérgation par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3\cos(nx)dx &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^3\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{3}{n}\int_0^\pi x^2\sin(nx)dx\right)\\
&= -\frac{6}{\pi n}\left(\left[-\frac{x^2\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos(nx)dx\right)\\
&= -\frac{6}{\pi n}\left[-\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos(nx)dx\right]\\
&= \frac{6\pi(-1)^n}{n^2} - \frac{12}{\pi n^2}\left(\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx)dx\right)\\
&= \frac{6\pi(-1)^n}{n^2} + \frac{12}{\pi n^4}\left[-\cos(nx)\right]_0^\pi\\
&= \frac{6\pi(-1)^n}{n^2} + \frac{12}{\pi n^4}(1-(-1)^n). \quad (\mathbf{1.5Pts})
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_f(x) = \frac{\pi^3}{4} + 6\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^4}\right)\cos(nx). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) Il suffit de remarquer que puisque la fonction f est contine sur $\mathbb{R}$, alors la convergence est uniforme. **(0.5 Pt)**
4) On remplace $x = \pi$, **(0.5 Pt)** alors on obtient

$$f(\pi) = \pi^3 = \frac{\pi^3}{4} + 6\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^4}\right)(-1)^n$$

$$= \frac{\pi^3}{4} + 6\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n^4}(-1)^n. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

En remplaçant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, alors on a

$$\pi^3 = \frac{\pi^3}{4} + 6\pi\frac{\pi^2}{6} - \frac{12}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{(2p-1)^4}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Ainsi,

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$