

L'examen Final -Analyse 3-

Exercice 01 : 04

Etudier la nature de chacune de séries numériques suivantes

- 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$ 2) $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^{\alpha n}}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 02 :

I) Considérons la suite de fonctions suivante

$$f_n(x) = nxe^{-nx}, \quad x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur \mathbb{R}^+ .
 2) Démontrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}^+ .
 3) Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ où $0 < a < b$.

II) Considérons la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n(x)$ avec

$$g_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n+x}, \quad x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 0} g_n(x)$ sur \mathbb{R}^+ .

2) Démontrer que $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n^2 + nx}$, en déduire que la série $\sum_{n \geq 0} g_n(x)$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 03 :

Considérons la série entière suivante

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - n + 4}{n + 1} x^n.$$

- 1) Déterminer le domaine de convergence de cette série.
 2) Déterminer le réel $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{n^2 - n + 4}{n + 1} = (n + 1) - 3 + \frac{a}{n + 1}.$$

- 3) Calculer la somme $S(x)$ de cette série.
 4) Considérons la fonction suivante

$$h(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}.$$

a) Démontrer l'égalité suivante

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{2-x}.$$

b) développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $h(x)$.

Correction EXAMEN I

Exo 1

1) $\frac{n}{n^3+1} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, et $\sum \frac{1}{n^2}$ série de Riemann $\alpha=2 > 1$ Converge

alors $\sum \frac{n}{n^3+1}$ Converge d'après T.C.

2) On utilise la règle de D'Alembert, on obtient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[(n+1)!]^\alpha}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha} = \frac{(n+1)^\alpha (n!)^\alpha (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n!)(n!)^\alpha} = \frac{(n+1)^\alpha}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \alpha = 2 \Rightarrow \text{La série Converge} \\ +\infty & \alpha > 2 \Rightarrow \text{" Diverge} \\ 0 & \alpha < 2 \Rightarrow \text{" Converge} \end{cases}$$

3) On utilise le critère de Leibniz car la série est une série alternée à partir d'un certain rang ; On pose $a_n = \frac{\ln n}{n}$ $n \geq 2$

et $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $x \geq 1$, la fonction associée à la suite $(a_n)_{n \geq 2}$

On a $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ donc $f(x)$ est décroissante $\forall x \geq 1 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 2}$

est une suite décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ Converge d'après Leibniz.

Exo 2

1) si $x=0$, $u_n(0) = 0$

si $x \in]-1; 1[$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \ln x = 0 \Rightarrow (u_n)$ c.s. vers $u(x)=0$

si $x=1$ $u_n(1) = 0$

2) $U_n(x)$ est une fonction dérivable sur $]0,1[$ et on a

$$U_n'(x) = x^{n-2}(1+n \ln x) \text{ et } U_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/n}$$

x	0	$e^{-1/n}$	1
$U_n'(x)$		+	-
$U_n(x)$		$U_n(e^{-1/n})$	

Donc $\sup_{x \in [0,1]} |U_n(x)| = U_n(e^{-1/n}) = \frac{1}{ne} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow (U_n) \text{ C.U.}$

3) a) En utilisant le critère de D'Alembert, on obtient sur $[0,1]$ vers $U(x) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1} \ln x \cdot n}{n+1 \cdot x^n \ln x} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n x}{n+1} = x < 1$$

Si $x=1$ $f_n(1) = \frac{2n(1)}{n} = 2 \Rightarrow \sum f_n \text{ C.S. sur } [0,1]$.

b) On a $f_n(x) = \frac{2n(x)}{n} \Rightarrow |f_n(x)| = \frac{|2n(x)|}{n} \Rightarrow \sup |f_n(x)| = \frac{\sup |2n(x)|}{n}$

$$\Rightarrow \sup |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 e}$$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ série de Riemann d'ordre 2 > 1 convergente $\Rightarrow \sum f_n \text{ C.U. sur } [0,1]$.

3) Comme $\sum f_n \text{ C.U. sur } [0,1]$ donc elle est C. unif sur $[0,1] \Rightarrow$ on peut

intégrer terme à terme et on a

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1} \ln x}{n} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x^{n+1} \ln x}{n(n+1)} \right]_0^1 - \frac{1}{n(n+1)} \int_0^1 x^n dx$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

4) a) En utilisant la décomposition en éléments simples, on a

$$\frac{-1}{n(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{(n+1)^2} \Rightarrow a = -1, b = c = 1$$

par identification.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 1 \text{ (série télescopique) } (U_n = \frac{1}{n})$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} = \sum \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) + \sum \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 2.$$

Exo 3 $a_n = \frac{n^2 - n + 4}{n+1}$

1) $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - n + 4}{n+1} \times \frac{n+2}{(n+1)^2 - (n+1) + 4} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^3} = 1$

Si $|R| = 1$ la série est grossièrement divergente \Rightarrow la série est absolument convergente sur $] -1, 1[$.

2) par identification, on obtient $d = 6 \cdot c - a - d$

$$\frac{n^2 - n + 4}{n+1} = n - 2 + \frac{6}{n+1}$$

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(n - 2 + \frac{6}{n+1} \right) x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k - 3 \sum_{k=0}^{+\infty} x^k + \frac{6}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k - \frac{3}{1-x} + \frac{6}{x} \int \sum_{k=0}^{+\infty} x^k dx$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1} \right)' - \frac{3}{1-x} + \frac{6}{x} \int \frac{1}{1-x} dx$$

$$= \left(\frac{x}{1-x} \right)' - \frac{3}{1-x} = \frac{6}{x} \ln(1-x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{3}{1-x} - \frac{6}{x} \ln(1-x)$$

3) par la décomposition en éléments simples, on obtient directement que $a = -1, c = 1, b = -1$

$$f(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-x/2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$\text{et } \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k \quad |x| < 1$$

$$\text{et } \frac{1}{1-x/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k} \quad |x| < 2$$

Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-k - \frac{1}{2^{k+1}} \right) x^k, \quad |x| < 1$$

Correction EXAMEN II

Exo 1

1) On a $\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ série de Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

Converge, alors $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$ Converge d'après T.C.

3) On utilise le critère de D'Alembert, On obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{a(n+1)}} \times \frac{n^{an}}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \frac{n^{an}}{(n+1)^{a(n+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \frac{n^{an}}{(n+1)^{an}} \cdot \frac{1}{(n+1)^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} \frac{1}{(n+1)^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-a}}{(n+1)^a} \end{aligned}$$

* Si $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^{a-1}} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0 < 1 \Rightarrow$ La série Conv

* Si $a < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = +\infty \Rightarrow$ La série diverge.

* Si $a = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-1} < 1 \Rightarrow$ La série Converge.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{an}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}} = \frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

$$2) \sum \frac{1 + \ln n}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n\sqrt{n}} + \sum \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$$

$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ série de Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ Converge.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} = 0 \Rightarrow \frac{\ln n}{\frac{1}{n^{1/4}}} = \frac{\ln n}{n^{1/4}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Alors $\sum \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ Converge car $\sum \frac{1}{n^{5/4}} = \sum \frac{1}{n^{5/4}}$ série de Riemann $\alpha = \frac{5}{4} > 1$ Converge. (en utilisant le T.C.)

Exo 2

I) 1) si $x=0$ $f_n(0) = 0$

si $x > 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n x e^{-nx} = 0 \Rightarrow (f_n)$ C.S un $f(x) = 0$.

2) (f_n) suite de fs dérivables sur \mathbb{R}_+ et on a :

$$f_n'(x) = (n - n^2 x) e^{-nx} = (1 - nx) e^{-nx} \text{ et on a}$$

x	0	$1/n$	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$f_n(1/n)$	0

Sur $x \in \mathbb{R}_+$ $|f_n(x)| = f_n(1/n) = e^{-1} = \frac{1}{e} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow (f_n)$ ne converge pas unif
Vlo $f_n = 0$ sur \mathbb{R}_+ .

3) $x \in [a, b] \Rightarrow x \leq b \Rightarrow nx \leq nb$.

et $x > a \Rightarrow -nx \leq -na \Rightarrow e^{-nx} \leq e^{-na}$

donc $nx e^{-nx} \leq nb e^{-na}$

et $\sum nb e^{-na}$ série numérique convergente, car : \times

d'après D'Alembert $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)b e^{-(n+1)a}}{n b e^{-na}} = \frac{n+1}{n} e^{-a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-a} < 1$ car $a > 0$

Alors $\sum nx e^{-nx}$ C.N sur $[a, b]$.

II) 1) En utilisant le critère de D'Alembert, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} &= \frac{(n+1)x e^{-(n+1)x}}{(n+1)[n+1+x]} \times \frac{n(n+1)}{nx e^{-nx}} = \frac{x e^{-(n+1)x}}{(n+1+x)} \frac{n+1}{x e^{-nx}} \\ &= \frac{n+1}{n+1+x} e^{-x} \rightarrow e^{-x} < 1 \quad x > 0 \end{aligned}$$

si $x=0$ $g_n(0) = \frac{f_n(0)}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum g_n(x)$ C.S sur \mathbb{R}_+ .

$$2) \text{ On a: } g_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{n+n} = \frac{n x e^{-nx}}{n(n+n)} = \frac{f_n(x)}{n(n+n)}$$

$$\text{Donc } \sup_{x \in \mathbb{R}_+} g_n(x) = \sup \left\{ \frac{f_n(x)}{n(n+n)} \right\} \leq \frac{\sup f_n(x)}{n^2} \leq \frac{e^{-1}}{n^2}$$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ série de Riemann (22) \Rightarrow converge $\Rightarrow \sum g_n$ c.n sur \mathbb{R}_+ .

Ex 03, $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$

$$1) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

si $x = 1$, $\frac{1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$ série de Riemann converge.

si $x = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ série alternée converge d'après Leibnitz.

donc la série converge absolument sur $[-1, 1]$.

2) D'après la composition en éléments simples on obtient $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right].$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) x^n \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\int \sum x^n dx \right) - \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \right]$$

$$= \frac{-1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2x^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} - x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= \frac{-1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2x^2} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2x^2} \left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\frac{-1}{2-x} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-x/2} = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2^n} = - \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n \geq 0} (2x)^n = \sum_{n \geq 0} 2^n x^n$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-2)^2} &= \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{(1-x/2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1/2}{(1-x/2)^2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right]' \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$h(x) = - \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2^{n+1}} + \sum_{n \geq 0} 2^n x^n + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2^{n+1}}$$