

2^{ème} année MATH- Semestre 1
Examen de rattrapage : Analyse 3
Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (5 Pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n)!}, \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

Exercice 2. (5 Pts)

Soit la série de fonction de terme général

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}, \quad n \geq 1, \quad x \geq 0.$$

1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

2) On note S la fonction somme de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.

Exercice 3. (6 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+4}}{2^n(n+1)(n+3)}.$$

1) Déterminer le rayon de convergence R .

2) En déduire le domaine de convergence D_f .

3) Pour $x \in D_f$, calculer la somme de la série entière f .

4) En déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 4. (4 Pts)

Soit la fonction f_1 , 2π -périodique définie sur $] -\pi, \pi]$ par

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in] -\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

1) Déterminer la série de Fourier associée à f_1 .

2) Soit f_2 la fonction 2π -périodique définie par

$$f_2(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x f_1(t) dt.$$

En déduire la série de Fourier associée à f_2 .

2^{ème} année MATH - Semestre 1
 Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 3
 Durée : 1h30mn

Exercice 1. (5 Pts)

1) On a $\sum \frac{(n+1)^{2n}}{(2n)!}$. Appliquons le critère de d'Alembert.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n+1)^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)^{2n+2}}{(n+1)^{2n}} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)^{2n+2}}{2(n+1)^{2n+1}} \frac{(n+2)}{(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{2n+2} \frac{(n+1)}{2(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{2n+2} \frac{(n+1)}{2(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{(n+1)} \right]^2 \frac{(n+1)}{2(2n+1)} \\ &= \frac{e^2}{4} > 1, \end{aligned}$$

donc la série diverge. (2.5 Pts)

2) Pour $\sum \frac{\exp(-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, on remarque que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = 0.$$

Donc, pour n assez grand,

$$n^2 \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

Ainsi,

$$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors par le critère de comparaison, la série $\sum \frac{\exp(-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ converge. (2.5 Pts)

Exercice 2. (5 Pts)

On a pour $x \geq 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

On remarque que

$$u'_n(x) = \frac{n(1+nx^2) - 2n^2x^2}{n^2(1+nx^2)^2}.$$

Alors, $u'_n(x) = 0 \Leftrightarrow n - n^2x^2 = 0 \Leftrightarrow n(1 - nx^2) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{n}}$.

De plus, $u_n(0) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$. Donc,

$$\sup_{x \geq 0} u_n(x) = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann), alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ converge normalement sur $[0, +\infty[$. (2 Pts)

2) Montrons que S est de classe C^1 sur tout intervalle $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Il suffit de montrer que $\sum u'_n(x)$ converge uniformément sur tout $[a, b]$.

On a

$$u'_n(x) = \frac{1}{n(1+nx^2)^2} - \frac{x^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

D'autre part, pour $x \in [a, b]$, on a

$$\frac{1}{n(1+nx^2)^2} \leq \frac{1}{n(1+na^2)^2}$$

et

$$\frac{x^2}{n(1+nx^2)^2} \leq \frac{b^2}{(1+na^2)^2}.$$

Donc,

$$\sup_{x \geq 0} u'_n(x) = \frac{1}{n(1+na^2)^2} + \frac{b^2}{(1+na^2)^2}.$$

Puisque $\sum \frac{1}{n(1+na^2)^2}$ et $\sum \frac{b^2}{(1+na^2)^2}$ convergent, alors $\sum u'_n(x)$ converge normalement, donc uniformément sur $[a, b]$. Ainsi, S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. (2 Pts)

3) On a $\forall x > 0, u_n(x) \leq \frac{x}{n^2 x^2} = \frac{1}{n^2 x^2}$. Donc,

$$S(x) \leq \frac{1}{x} \sum \frac{1}{n^2}.$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$. (1 Pt)

Exercice 3. (6 Pts)

On a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+4}}{2^n(n+1)(n+3)}$.

1) Le rayon de convergence R :

Appliquons le critère de d'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2n+6}}{2^{n+1}(n+2)(n+4)} \cdot \frac{2^n(n+1)(n+3)}{x^{2n+4}} \right| = \frac{x^2}{2}.$$

Si $\frac{x^2}{2} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}$, alors la série entière converge, donc $R = \sqrt{2}$. (1 Pt)

2) Pour $x = +\sqrt{2}$, on a la série numérique suivante $\sum \frac{(\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{2})^4}{2^n(n+1)(n+3)} = \sum \frac{4}{(n+1)(n+3)}$

qui converge. (0.5 Pt)

Même chose pour $x = -\sqrt{2}$. (0.25 Pt) Donc, le domaine de convergence est $D_f = [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$. (0.25 Pt)

3) La somme de f :

On remarque que pour $x \neq 0$, on a $f(0) = 0$. (0.25 Pt)

Pour $x \in D_f \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right).$$

Donc,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+4}}{2^{n+1}(n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+4}}{2^{n+1}(n+3)}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n+1}}{(n+1)} - \frac{4}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n+3}}{2^{n+3}(n+3)} \\
&= x^2 \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{4}{x^2} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{(n)} \\
&= x^2 \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{4}{x^2} \left(\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \right) \right) \\
&= \left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right) \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + 2 + \frac{x^2}{2}. \quad (3\text{Pts})
\end{aligned}$$

4) Pour $x = \sqrt{2}$, on a

$$4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = 3,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}. \quad (0.75\text{Pt})$$

Exercice 4. (4 Pts)

1) Nous remarquons que f est paire, donc $b_n = 0, \forall n \geq 1$. (0.5 Pt)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} dx = 1, \quad (0.5\text{Pt})$$

et pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{2}{n\pi} [\sin(nx)]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= -\frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right). \quad (1\text{Pt})
\end{aligned}$$

Donc,

$$a_{2m} = 0, \quad \text{et} \quad a_{2m-1} = \frac{2(-1)^m}{\pi(2m-1)}. \quad (0.5\text{Pt})$$

Ainsi, la série de Fourier associée à f est

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)} \cos((2m-1)x). \quad (0.5\text{Pt})$$

2) On a $f_2(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x f_1(t) dt$. Donc,

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= -\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)^2} [\sin((2m-1)t)]_0^x \\
\Rightarrow f_2(x) &= -\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)^2} \sin((2m-1)x). \quad (1\text{Pt})
\end{aligned}$$