Université de M'sila		**Faculté : Maths-informatique**
L2 Mathématiques	Examen Final	**Année universitaire : 2023/2024**
Module : Analyse 3	**Troisième semestre**	**Durée : 1 h 30 m**

Barème

Exercice : 1 (7pts)

Soient la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et S_n sa somme partielle où $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$.

2.5 (1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, puis simplifier S_n.

3 (2) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et donner sa somme S.

1.5 (3) Par un changement de variable approprié, déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Barème

Exercice : 2 (7pts)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$.

2.5 (1) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$.

2.5 (2) Soit $a > 0$ un réel, montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

2 (3) Est ce que la convergence est uniforme sur $]0, +\infty[$. Justifier votre réponse ?

Barème

Exercice : 3 (6pts)

Soient la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1}x^n$ et S sa somme.

2 (1) Déterminer le rayon R et le domaine D de convergence de cette série.

1.5 (2) Montrer que S est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$.

2.5 (3) Calculer S et déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$.

Indication : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Fin **14 janvier 2024** **Bon Courage**

Université de M'sila	Correction d'examen	Faculté : Maths-informatique
L2 Mathématiques		Année universitaire : 2023/2024
Module : Analyse 3	Session normal	Durée : 1 h 30m

Barème

Correction d'exercice : 1 (7pts)

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et S_n sa somme partielle, alors,

0.5 (1) (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.

2 (b) $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

0.5 (2) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge $\Leftrightarrow S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et finie.

1.5 Comme, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

1 Donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et converge et sa somme $S = 1.$

0.5 (3) On faisant le changement de variable $k = n+1.$ Alors, d'après question 2, on trouve,

1 $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Barème

Correction d'exercice : 2 (7pts)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}.$

(1) La convergence simple de $(f_n)_{n\geq 0}$.

1 (a) Pour $x = 0,$ on a $f_n(0) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$ donc la suite $(f_n(0))_{n\geq 0}$ est divergente.

1 (b) Pour $x > 0,$ nous avons, $f_n(x) = ne^{-n^2x^2} = \frac{n}{e^{n^2x^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

0.5 Donc la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle $f = 0$ sur $]0, +\infty[$.

(2) La convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $[a, +\infty[, \ (a > 0).$

1 Sur $[a, +\infty[$ les fonctions $f_n, \ (n \in \mathbb{N})$ sont positives et décroissantes, donc,

1 $$\sup_{x\in[a,+\infty[} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \frac{n}{e^{n^2a^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

0.5 Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

(3) Sur $]0, +\infty[$ nous avons, pour $x = \frac{1}{n}$,

1.5 $$\sup_{x\in]0,+\infty[} \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

0.5 Alors, la convergence n'est donc pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

Barème

Correction d'exercice : 3 (6pts)

Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1} x^n$ et S sa somme.

Université de M'sila	**Correction d'examen**	Faculté : Maths-informatique
L2 Mathématiques		Année universitaire : 2023/2024
Module : Analyse 3	Session normal	Durée : 1 h 30m

1 a) D'après le règle d'Hadamard, on a :

0.5 $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ et le rayon $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2} = 1.$

C'est à dire la série converge pour tout $|x| < 1.$

b) Pour déterminer le domaine $D,$ il faut examiner le cas $|x| = 1.$

0.5 Donc, pour $x = 1,$ on a la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n}{n+1}$ diverge, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$

0.5 Si $x = -1,$ la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ diverge, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n+1} = \pm 1$(n'existe pas).

0.5 D'où, $D =]-1, 1[.$

0.5 2 Les fonctions $x \mapsto \dfrac{n}{n+1} x^n, \ (n \in \mathbb{N})$ sont continues sur $]-1, 1[,$

0.5 D'après critère de Weierstass, la convergence normale (donc, uniforme) de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n}{n+1} x^n$ sur tout $[-r, r] \subset]-1, 1[, \ (r > 0).$ Car, $\sup\limits_{x\in[-r,r]} \left|\dfrac{n}{n+1} x^n\right| = \dfrac{n}{n+1} r^n,$ et la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n}{n+1} r^n$ converge, car $\dfrac{n}{n+1} r^n \underset{+\infty}{\sim} r^n, \ ($terme général d'une série géométrique$).$ Alors,

0.5 le Théorème de continuité sur les séries de fonctions, nous permet la continuité de S sur $]-1, 1[.$

0.5 3 a) Calculons d'abord $S.$ Si $x = 0,$ on a $S(0) = 0.$

b) Si $x \neq 0$ Alors, par utilisation l'indication donné, on aura :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

0.5 $$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) dt$$

0.5 $$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \int_0^x \frac{-1}{1-t} dt = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x).$$

D'où, $S(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x} \ln(1-x) & : \quad x \neq 0 \end{cases}$

0.5 c) D'une part la fonction S est continue sur $]-1, 1[,$ donc pour $x = \dfrac{1}{2},$ on obtient,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} S(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)} \lim_{x\to\frac{1}{2}} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}.$$

0.5 D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} S(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \left[\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x} \ln(1-x)\right] = 2 - 2\ln 2.$

Par conséquent $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{(n+1)2^n} = 2 - 2\ln 2.$

Fin | **14 janvier 2024** | **Bon Chance**