















Université de M'sila	 <b>Examen de Rattrapage</b> Troisième semestre	Faculté : Maths-informatique
L2 Mathématiques		Année universitaire : 2023/2024
Module : Analyse 3		Durée : 1 h 30m

Fonction.com  
ça soude!

Barème	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Exercice : 1</div> 
	<p>Soit la série numérique <math>\sum_{n \geq 0} u_n</math> dont le terme général <math>u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(3 + \sqrt{n})}</math>.</p> <p><b>3</b>  En appliquant le théorème de Leibniz montrer que la série <math>\sum_{n \geq 0} u_n</math> est convergente.</p> <p><b>1.5</b>  Calculer la limite <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}}  u_n </math>.</p> <p><b>2.5</b>  Dédire la semi-convergence de la série <math>\sum_{n \geq 0} u_n</math>.</p>
Barème	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Exercice : 2</div> 
	<p>On considère la série de fonctions <math>\sum_{n \geq 1} f_n</math> telle que, <math>f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}</math>.</p> <p><b>3</b>  Montrer que cette série converge normalement pour tout <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p> <p><b>1.5</b>  Montrer que <math>f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}</math> est une fonction continue sur <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p><b>1.5</b>  Par intégration, montrer que <math>\int_0^{\pi} f_n(x) dx = \frac{1}{n^4} (1 - (-1)^n)</math>.</p> <p><b>2.5</b>  Dédire que <math>\int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}</math>.</p>
Barème	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Exercice : 3</div> 
	<p>Soit <math>f</math> la fonction <math>2\pi</math>-périodique définie sur l'intervalle <math>] -\pi, \pi]</math>, par <math>f(x) = \pi -  x </math>.</p> <p><b>0.5</b>  Tracer le graphe de <math>f</math> sur l'intervalle <math>] -\pi, 3\pi]</math>.</p> <p><b>3</b>  Déterminer les coefficients de Fourier <math>a_n</math> et <math>b_n</math> associé à <math>f</math>.</p> <p><b>1</b>  Donner la série de Fourier associée à <math>f</math>.</p> <p><b>1.5</b>  En déduire la somme <math>\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}</math>.</p>

Fin	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">1<sup>er</sup> juin 2024</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; text-align: right;">Dr. D. Bouafia</div>
-----	---	--

Barème	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">Correction d'exercice : 1</div> <span style="font-size: 0.8em; border: 1px dashed black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px; margin-left: 5px;">7pts</span>
	<p>Soit la série numérique <math>\sum_{n \geq 0} u_n</math> dont le terme général <math>u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(3 + \sqrt{n})}</math>.</p>
1	<p>1 On définit la fonction <math>f</math> sur <math>\mathbb{R}_+</math> par : <math>f(x) = \frac{1}{\ln(3 + \sqrt{x})}</math>.</p>
1 + 0.5	<p>Alors, on a <math>\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = -\frac{(\ln(3 + \sqrt{x}))'}{(\ln(3 + \sqrt{x}))^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\ln(3 + \sqrt{x}))^3} &lt; 0</math>.</p>
0.5	<p>Donc la suite de terme général <math> u_n  = \frac{1}{\ln(3 + \sqrt{n})}</math> est décroissante, elle tend vers 0, i.e.</p>
0.5	<p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty}  u_n  = 0</math>.</p>
0.5	<p>D'après le théorème de Leibniz ( le test de série alternée), la série <math>\sum_{n \geq 0} u_n</math> converge.</p>
0.5 + 1	<p>2 On a <math> u_n  = \frac{1}{\ln(3 + \sqrt{n})}</math>, par suite, <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}}  u_n  = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\ln(3 + \sqrt{n})} = +\infty</math>.</p>
0.5	<p>3 On étudie la convergence absolue. Alors, d'après question 2, on a <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}}  u_n  = +\infty</math>.</p>
1	<p>Donc, selon le règle de Riemann la série de terme général <math> u_n  = \frac{1}{\ln(3 + \sqrt{n})}</math> diverge, car</p>
1	<p><math>(\alpha = \frac{1}{2} &lt; 1)</math>, ce qui montre que la série <math>\sum_{n \geq 0} u_n</math> ne converge pas absolument.</p>
0.5	<p>D'où, cette série est donc semi-convergente.</p>

Barème	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">Correction d'exercice : 2</div> <span style="font-size: 0.8em; border: 1px dashed black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px; margin-left: 5px;">7pts</span>
1	<p>1 On a <math>\forall x \in \mathbb{N}^* : \sup_{x \in \mathbb{R}} \left  \frac{\sin(nx)}{n^3} \right  \leq \frac{1}{n^3}</math>. Comme <math>\frac{1}{n^3}</math> est le terme général d'une série de</p>
1 + 0.5	<p>Riemann convergente avec <math>\alpha = 3 &gt; 1</math>, donc par critère de Weierstrass la série <math>\sum_{n \geq 1} f_n</math> normalement convergente sur <math>\mathbb{R}</math>.</p>
0.5	<p>2 Les fonctions <math>f_n, (n \geq 1)</math> sont continues, et la série <math>\sum_{n \geq 1} f_n</math> converge uniformément sur <math>\mathbb{R}</math>,</p>
0.5 + 0.5	<p>car elle normalement convergente, donc la fonction somme <math>f</math> est une fonction continue sur <math>\mathbb{R}</math>.</p>
0.5	<p>3 La convergence étant uniforme sur <math>[0, \pi] \subset \mathbb{R}</math> et les fonctions <math>f_n, (n \geq 1)</math> étant continues, donc sont intégrables. Par intégration, on trouve,</p>
1	<p><math>\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \frac{1}{n^3} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{1}{n^3} \left[ -\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n^4} (1 - (-1)^n)</math>.</p>
0.5	<p>4 D'après question 2, on obtient</p> <p><math>\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} (1 - (-1)^n)</math>.</p>

**0.5** Selon que  $n$  est pair ou impair  $(1 - (-1)^n)$  est nul ou vaut  $2$ , on va couper la somme en deux

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{2k}}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{2k+1}}{(2k+1)^4}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^4}.$$

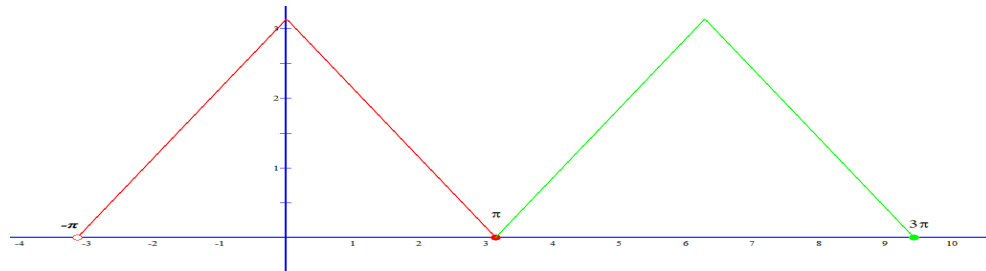
**0.5** Puis, on fait le changement  $n = 2k + 1$ , alors,  $\begin{cases} k = 0 \\ n = 1, \end{cases}$  on trouve donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}.$$

Barème Correction d'exercice : 3 6pts

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur l'intervalle  $] -\pi, \pi]$ , par  $f(x) = \pi - |x|$ .

**0.5** ❶ On trace la courbe  $\mathcal{C}_f$  sur  $] -\pi, 2\pi]$ , puis on la déplace par un translation de vecteur  $\vec{v} = -2\pi$ .



**0.5** ❷ Les coefficients de Fourier  $a_n$  et  $b_n$  associé à  $f$ .

**0.5** ❸ a) Il est facile de voir que la fonction  $f$  est paire, de sorte que  $\forall n \in \mathbb{N}^* : b_n = 0$ .

**1** ❸ b)  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \left[ \pi x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} = \pi$ .

**1.5** ❸ c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} (1 - (-1)^2).$$

**1** ❸ Donc, la série de Fourier donner par,  $F(f)(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} (1 - (-1)^2) \cos(nx)$ .

**0.5** ❹ Selon que  $n$  est pair ou impair, on a  $F(f)(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$ .

Puisque la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , le théorème de Dirichlet montre que la série converge vers  $f$  en tout point de  $\mathbb{R}$ , en particulier, si  $x = 0$ , on en déduit

**0.5**  $f(0) = F(f)(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k+1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .