جامعة عين تموشنت -بلحاج بوشعيب
University Ain Temouchent Belhadj Bouchaib

Département de Mathématiques et Informatique — *Enseignante: Dr. GAOUAR*
Niveau: $2^{ème}$ *Année Mathématiques* — *Année universitaire: 2022-2023*

Examen - Analyse 3
(_08/01/2023 - Durée: 1h30min_)

Exercice 1 (5 points)

Etudier la nature des séries numériques de termes généraux:

$$ne^{1/n} - n, \quad \frac{\cos 2n}{n \log n}, \quad \frac{1}{n2^n}, \quad (-1)^n \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$$

Exercice 2 (4 points)

- Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions suivante:

$$f_n(x) = xe^{x/n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

- Etudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions suivante:

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}, \quad \forall x \geq 0$$

Exercice 3 (5 points)

Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$xy^{''} + 3y^{'} - 4x^3 y = 0, \quad y(0) = 1$$

en utilisant la méthode des séries entières.

Exercice 4 (6 points)

- Montrer que la fonction f de période 2π, définie sur $]0, 2\pi[$ par:

$$f(x) = x(2\pi - x)$$

  est développable en série de Fourier et déterminer cette série.

- En déduire du développement obtenu la valeur des séries suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Bon Courage

Département de Mathématiques et Informatique *Enseignante: Dr. GAOUAR*
Niveau: $2^{ème}$ *Année Mathématiques* *Année universitaire: 2022-2023*

Corrigé de l'examen - Analyse 3

Exercice 1 (5 points)

- Par le développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de zéro: $e^{1/n} \sim 1 + \frac{1}{n}, \ \ n \to \infty$
  D'où: $ne^{1/n} - n = n(e^{1/n} - 1) = n(1 + \frac{1}{n} - 1) = 1$, par la suite: $\underset{n\to\infty}{lim}(ne^{1/n} - n) = 1 \neq 0$, la série diverge. **(1 pt)**

- On applique le critère d'Abel, on a: $\dfrac{\cos 2n}{n \log n} = \cos(2n) \times \dfrac{1}{n \log n} = \alpha_n \times \beta_n$

  1. $\left|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \cos(2k)\right| \leq \dfrac{1}{|\sin 1|} = M > 0$
  2. la suite (β_n) est décroissante et tend vers 0.

  D'où: la série converge. **(1.5 pt)**

- On applique le critère de d'Alembert: $\underset{n\to\infty}{lim} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \underset{n\to\infty}{lim} \dfrac{n}{(n+1)2} = \dfrac{1}{2} < 1$, la série converge. **(1 pt)**

- La série est absolument convergente car: $\left|(-1)^n \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$
  En passant par le critère d'Abel avec $\beta_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\alpha_n = \cos n$, on déduit la convergence simple de la série. **(1.5 pt)**

Exercice 2 (4 points)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $xe^{x/n} \to x$ lorsque $n \to \infty$.
  Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}^+$. **(0.5 pt)**
  Or:
  $$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|xe^{x/n} - x\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} x(e^{x/n} - 1)$$
  La dérivée de la fonction $x \mapsto x(e^{x/n} - 1)$ est la fonction $x \mapsto e^{x/n}(1 + \frac{x}{n}) - 1$, qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^*_+$. Ainsi, $x \mapsto x(e^{x/n} - 1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, ce qui montre que:
  $$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} x(e^{x/n} - 1) = \underset{x\to\infty}{lim}\, x(e^{x/n} - 1) = \infty$$
  On en déduit que la convergence n'est pas uniforme. **(1.5 pt)**

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:
  $$\left|\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2} \quad \textbf{(1 pt)}$$
  Or, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par conséquent la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2+1}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, Ce qui entraine sa convergence uniforme et simple sur $\mathbb{R}$. **(1 pt)**

Exercice 3 (5 points)

On sait que: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ **(0.5 pt)**

On les remplace dans l'équation différentielle, on obtient:

$$\begin{aligned} xy^{''} + 3y^{'} - 4x^3 y = 0 &\iff \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} x^{n-1} = 0 \\ &\iff 3a_1 + (6a_2 + 2a_2)x + (9a_3 + 6a_3)x^2 + \sum_{n=4}^{\infty} [n(n-1)a_n + 3na_n - 4a_{n-4}] x^{n-1} = 0 \end{aligned}$$ **(2 pt)**

D'où: $3a_1 = 0$ et $8a_2 = 0$ et $15a_3 = 0$ **(0.5 pt)**

de plus: $a_n = \dfrac{4}{n(n+2)} a_{n-4}$, $\forall n \geq 4$ **(0.5 pt)**

Les seuls coefficients non nuls sont les a_{4n}, **(0.5 pt)**

alors:

$$a_{4n} = \frac{a_0}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)!}$$ **(0.5 pt)**

La solution de l'équation différentielle est de la forme:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(2n+1)!}$$ **(0.5 pt)**

Exercice 4 (6 points)

- f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est régulière sur $\mathbb{R}$ **(0.5 pt)**
- f est bornée, $|f(x)| \leq \pi$ **(0.5 pt)**
- f est monotone continue sur les deux sous intervalles $]0, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$ **(0.5 pt)**
- f est paire (d'après le graphe), donc: $b_n = 0$, **(0.5 pt)**

D'où: f est développable en série de Fourier, et on a:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$ **(0.5 pt)**

de plus:

- $a_0 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} x(2\pi - x)\, dx = \dfrac{4\pi^2}{3}$ **(0.5 pt)**
- $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} x(2\pi - x)\cos(nx)\, dx = -\dfrac{4}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ **(1 pt)**

D'où:

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$ **(0.5 pt)**

Calculs des sommes:

- on pose $x = 0$:

$$\frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ **(0.5 pt)**

- D'après l'égalité de Parseval, on a:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x(2\pi - x)\right)^2\, dx = \frac{16\pi^4}{15}$$

et:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{8\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

D'où: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ **(1 pt)**