

EXAMEN D'ANALYSE 3

Exercice 1 (8 pts)

Etudier la nature des séries numériques suivantes :

$$1) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n-2}{n} \right)^{n^2}, \quad 2) \sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad 3) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad 4) \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n!)^2}.$$

Exercice 2 (6 pts)

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $(n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0, +\infty[$?
3. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.
4. Calculer $\int_1^2 f(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx$.

Exercice 3 (6 pts)

Soit $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$.

1. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[0, +\infty[$.
2. En déduire la continuité de la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur tout intervalle $[a, b] \in]0, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée f' comme somme d'une série de fonctions.