

Université Mohammed Kheider - Biskra
 Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
 Département de Mathématiques
 Module: Analyse 03 (2ème année Licence Maths 2022/2023)
 Dimanche 15 Janvier 2023

Examen Final

Exercice 1 :

1. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence des séries numériques.
2. Etudier la nature des séries numériques suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \ln n}{n\sqrt{n}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - (-1)^n}{3^n} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} (\sin \alpha)^2 \quad , \forall \alpha \in [0, \pi/2].$$

puis calculer la somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - (-1)^n}{3^n}$.

Exercice 2 :

1. Enoncer le théorème de dérivation pour la limite d'une suite de fonctions.
2. Soit la suite de fonctions définie par:

$$f_n(x) = n \sin \frac{x}{n} \quad , x \in [0, +\infty] \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- (a) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- (b) Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ puis sur l'intervalle $[0, 1]$.
- (c) Etudier la convergence simple de la suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- (d) Que peut-on déduire?

Exercice 3 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Tracer le graph de f .
2. Déterminer la série de Fourier de la fonction f .

Exercice 4 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite numérique réelle, et f une fonction. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses.

1. Si la série $\sum a_n x^n$ converge, alors son rayon de convergence est inférieur ou égal à $|x|$.
2. Les rayons de convergence de $\sum a_n x^n$ et de $\sum \frac{a_n}{n} x^n$ sont égaux.
3. Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est R , alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^{2n+1}$ est \sqrt{R} .
4. Si la série $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence nul, alors elle converge uniformément sur \mathbb{R} .
5. Si la série $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence infini, alors sa somme est une fonction continue sur \mathbb{R} .
6. Si f est développable en série entière sur $] -\delta, \delta[$, alors f est de classe $C^\infty (]-\delta, \delta[)$.
7. Si f est une fonction impaire, et si $\sum a_n x^n$ est son développement en série entière, alors pour tout $k \in \mathbb{N} : a_{2k} = 0$.
8. Si f est une fonction croissante, et si $\sum a_n x^n$ est son développement en série entière, alors pour tout $n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$.

Corrigé type : Analyse 03 (2ème année Licence Maths 2022/2023)

Exercice 1 :

1. La série numérique converge si et seulement si elle vérifie la condition de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall p \geq q \geq n(\epsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^p u_k - \sum_{k=0}^q u_k \right| < \epsilon \quad (0, 5pt)$$

2. Etude de la nature des séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \ln n}{n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - (-1)^n}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} (\sin \alpha)^2, \quad \forall \alpha \in [0, \pi/2].$$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \ln n}{n\sqrt{n}}$ converge par équivalence puisque $0 \leq \frac{1 + \ln n}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2} (\ln n)^{-1}}$

et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2} (\ln n)^{-1}}$ converge d'après Bertrand. (1pt)

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - (-1)^n}{3^n}$ converge d'après D'Alembert puisque $\frac{n - (-1)^n}{3^n} \geq 0, \quad \forall n \geq 1$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1 - (-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n - (-1)^n} = \frac{1}{3} < 1.$ (1pt)

• $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} (\sin \alpha)^2$ diverge d'après la condition nécessaire pour tout $\alpha \in]0, \pi/2]$ puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^2} (\sin \alpha)^2 = +\infty \neq 0.$$

Pour $\alpha = 0$, la série nulle converge. (1pt)

3. La somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - (-1)^n}{3^n}$ est la limite de la suite de la somme partielle (S_n) .

On a $u_n = \frac{n - (-1)^n}{3^n} = \frac{n}{3^n} - \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{n+1}{3^n} - \frac{1}{3^n} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$

Alors $\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{3^k} - \frac{1}{3^k}$

$$= 3 \left[\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} - \frac{1}{3} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \right] - \left(\frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2 \cdot 3^n} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)}$$

(1, 5pt)

Donc
$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2 \cdot 3^n} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} - \left(\frac{-1}{3} \frac{1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)} \right)$$

et par conséquent
$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Exercice 2 :

1. **Théorème de dérivation** (1pt): Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continument dérivable sur l'intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes:

- 1) $\exists x_0 \in [a, b]$, tel que la suite numérique $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- 2) La suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur $[a, b]$.

Alors : la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continument dérivable f sur $[a, b]$ et l'on a $f' = g$.

2. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où

$$f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}, \quad \forall x \in [0, +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(a) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{x}{n} = x = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (1pt)$$

(b) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ : On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}_+} \left| n \sin \frac{x}{n} - x \right| \neq 0,$$

puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| n \sin \frac{x}{n} - x \right| = +\infty. \quad (1pt)$$

• La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$: On pose

$$g(x) = n \sin \frac{x}{n} - x \leq 0 \implies g'(x) = \cos \frac{x}{n} - 1 \leq 0$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Sup}_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Sup}_{x \in [0, 1]} \left| n \sin \frac{x}{n} - x \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| n \sin \frac{1}{n} - 1 \right| = 0 \quad (1, 5pt)$$

(c) La suite des dérivées est donnée par :

$$f'_n(x) = \cos \frac{x}{n}, \quad \forall x \in [0, +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (0, 5pt)$$

elle converge simplement sur $[0, +\infty[$ puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{x}{n} = 1 \quad (0, 5pt)$$

(d) D'après le théorème de dérivation et puisque la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ , alors on déduit que la suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

(0, 5pt)

Exercice 3 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Le graphe de f . (1pt)

2. Les coefficients de Fourier :

La fonction f est paire alors $b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1pt)

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \left[\int_0^{1/2} dx + \int_{1/2}^1 -dx \right] = 0. \quad (1pt)$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx \\ &= 2 \left[\int_0^{1/2} \cos(n\pi x) dx + \int_{1/2}^1 -\cos(n\pi x) dx \right] \\ &= \frac{4 \sin n\pi/2}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1, 5pt)$$

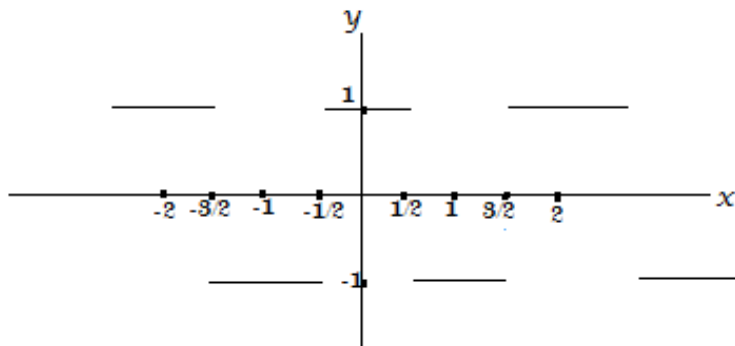
alors la série de Fourier associée à f est

$$4 \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\pi/2}{n\pi} \cos(n\pi x) = 4 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} \cos((2k+1)\pi x) \quad (0, 5pt)$$

Exercice 4 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite numérique réelle, et f une fonction.

1. F 2. V 3. V 4. F (4pts)

5. V 6. V 7. V 8. F



1. *Le graphe de f .*(1pt)