Université Mustapha Stambouli de Mascara

Faculté des Sciences Exactes **Département de Mathématiques**

2 **ème Année Mathématique** **(17/01/2023) Durée : 1h30mn**

Examen d'Analyse 3

Exercice 1 : (6 points)

1)Etudier la nature de la série dont le terme général U_n est donné par :

$$U_n = f(a + \frac{1}{n}) + f(a - \frac{1}{n}) - 2f(a)$$

où f est une fonction de classe C^2 au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$.
2) Etudier la nature de la série de terme général $U_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \ln \cos \dfrac{1}{n}$ où α est un paramètre réel.

Exercice 2 : (5 points)

On considère la suite de fonctions $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ mais qu'il ne converge pas uniformement sur cet intervalle.
2) Montrer quil y a de convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[\beta, +\infty[$ où $\beta > 0$.

Exercice 3 : (5 points)

Déterminer la série de Fourier de la fonction f qui est 2π-périodique égale à $|x|$ sur l'intervalle $] - \pi, +\pi]$. Étudier la convergence.
2) En déduire les valeurs de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Exercice 4 : (4 points)

1) Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

2) Montrer que l'intégrale généralisé $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.

Correction d'examen 2022-2023

Exercice 1 : 1) En utilisant les développements limétés de f au voisinage de a à l'odre 2, on a :

$$f(a+\frac{1}{n}) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\frac{1}{n} + \frac{f''(a)}{2!}\frac{1}{n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})\text{..........................}\mathbf{(1)}$$

$$f(a-\frac{1}{n}) = f(a) - \frac{f'(a)}{1!}\frac{1}{n} + \frac{f''(a)}{2!}\frac{1}{n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})\text{...........................}\mathbf{(1)}$$

Donc

$$\begin{aligned} U_n &= f(a+\frac{1}{n}) + f(a-\frac{1}{n}) - 2f(a) \\ &= \frac{f''(a)}{n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})\text{.............................}\mathbf{(0.5)} \end{aligned}$$

Comme la suite (n^2U_n) converge vers $f''(a)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \Longrightarrow |n^2U_n - f''(a)| < 1\text{...................}\mathbf{(0.5)}$$

ou alors

$$|n^2U_n| < 1 + |f''(a)|$$

par conséquent

$$|U_n| < \frac{1+|f''(a)|}{n^2}\text{..............}\mathbf{(0.5)}$$

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge. . . . . **(0.5)**,
la série de terme général U_n converge absolument . . . . **(0.5)**.
2) On utilise les développemnts limités au voisinage de 0 de :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2), \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\text{.......}\mathbf{(0.5)}$$

Il vient

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{(n+1)^\alpha}\ln\cos\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^\alpha}\ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^\alpha}\left[-\frac{1}{2n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})\right] \\ &= -\frac{1}{2n^2}\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha}\circ(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{2(n+1)^{\alpha+2}}\text{.........}\mathbf{(1)} \end{aligned}$$

La série est donc convergente ssi $\alpha + 2 > 1$, soit $\alpha > -1$. . . . . **(0.5)**

Exercice 2 : 1) Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(0) = 0$.
Pour $x > 0$ fixé,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2}{nx} = 0.$$

Ce qui montre que (f_n) converge simplement vers zéro sur $[0,+\infty[$ .... **(1)**.
Il suffit de montrer qu'il n' y a pas de convergence uniforme sur $[0,1]$.
Or, pour $x=\frac{1}{n}$ on trouve

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}=1\leq\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|.$$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers zéro sur $[0,1]$ .... **(1)**.
2) On a

$$f_n(x)=\frac{2n}{(1+n^2x^2)^2}(1-n^2x^2).$$

$$\begin{aligned} f_n'(x)=0 &\Longrightarrow 1-n^2x^2=0\\ &\Longrightarrow x=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

ce qui permet de voir aussitôt que la fonction f_n est croissante sur $[0,\frac{1}{n}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{n},+\infty[$, donc passe par un maximum pour $x=\frac{1}{n}$..................... **(1)**
Si on se donne $\alpha>0$, alors

$$\forall n\geq\frac{1}{\alpha},\quad \sup_{[\alpha,1]}|f_n(x)|=f_n(\alpha)=\frac{2n\alpha}{1+n^2\alpha^2}.$$

qui tend vers zéro quand n tend vers linfini. Ainsi, (f_n) converge uniformément vers zéro sur chaque intervalle $[\alpha,+\infty[$ avec $\alpha>0$ .... **(1)**.

Exercice 3 : 1) La fonction f est monotone par morceaux et 2π-périodique. Elle est paire donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad b_n=0$ .... **(1)** .
- On a $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi xdx=\pi$.. **(0.5)**
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nxdx.$$

On intègre par partie

$$\left\{\begin{array}{c} u=x\\ dv=\cos nxdx\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{c} du=dx\\ v=\frac{\sin nx}{n}\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} a_n=\frac{2}{\pi}\left\{\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{\sin nx}{n}dx\right\} &= \frac{2}{\pi n^2}[\cos nx]_0^\pi=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\\ &= \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } n=2p\\ -\frac{4}{\pi(2p+1)^2} & \text{si } n=2p+1\end{array}\right. \quad ....\textbf{(1.5)}\end{aligned}$$

On a donc la série de Fourier de f qui s'écrit

$$S_f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}.$$

Cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Elle converge vers la fonction f d'après le théorème de Dirichlet .... **(0.5)**
2) La fonction étant continue, la somme de la série de Fourier est exactement égale à la fonction en tout point de $\mathbb{R}$. En particulier prenons $x = 0$. il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.......\textbf{(1)}$$

On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2} = \frac{\pi^2}{12}.........\textbf{(1)}$$

Exercice 4 : 1) Le changement de variable $x = \dfrac{b+a}{2} + t\dfrac{b-a}{2}$ ramène l'intégrale à

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_{-1}^{1} = \pi.......\textbf{(2)}$$

2) On a

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}......\textbf{(2)}$$

Ce qui montre que l'intégrale généralisé $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.