

Université Yahia Fares de Medea	Année universitaire : 2022–2023
Faculté des Sciences	2 ^{ème} Année Mathématiques
Département de Mathématiques et Informatique	Module : Analyse 3

Examen de fin de semestre

Exercice 1 (08 pts)

- 1 Calculer la somme de la série suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

- 2 Étudier suivant les valeurs de $a > 0$ la convergence des séries suivantes :

1 $\sum_{n \geq 1} a^{\ln n}$ 2 $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^2}$ 3 $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$

Exercice 2 (04 pts) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- 1 Représenter les fonctions f_1 et f_2 dans un repère orthonormé.
2 Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 3 (08 pts) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

- 1 a Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ . On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
b Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
c Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
- 2 a A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $F_n(x)$ pour tout $x > 0$.
b Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} F_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ .
c On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$. Exprimer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ sous forme d'une somme d'une série numérique.
- 3 Montrer que $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
- 4 En déduire l'identité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Correction type

Exercice ① ① on pose $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{\frac{n^2}{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{(n-1)(n+1)}}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$= \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} = a_{n+1} - a_n$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ est une série télescopique

2 pts

Convergente car la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente. De plus.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - a_1 = 1 - 0 = 1$$

② Etudiant suivant les valeurs de $a > 0$
la convergence de séries:

① $\sum_{n \geq 1} a^{n \ln n}$, on pose $u_n = a^{n \ln n}$

on utilisant la règle de Raabe-Dahamel, on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(a^{\ln n - \ln(n+1)} \right)$$

(2 pts)

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \ln a = - \ln a.$$

• si $-\ln a > 1$ ($\Leftrightarrow a < \frac{1}{e}$) \rightarrow CV
• si $-\ln a < 1$ ($\Leftrightarrow a > \frac{1}{e}$) \rightarrow div

• si $a = \frac{1}{e}$ donc $u_n = \left(\frac{1}{e} \right)^{n \ln n} = \frac{1}{n}$
donc la série est divergente.

$$\textcircled{2} \quad u_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^2}$$

On applique la règle de Cauchy, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a} < 1, \quad \forall a > 0$$

1 pt

donc la série est convergente pour toute la valeur de $a > 0$

$$\textcircled{3} \quad u_n = \frac{a^n n!}{n^n} \quad \text{on applique la règle de D'Alembert:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e} \quad \text{Alors.}$$

• si $\frac{a}{e} < 1$ ($\Leftrightarrow a < e$) \rightarrow la série converge.

• si $\frac{a}{e} > 1$ ($\Leftrightarrow a > e$) \rightarrow la série diverge.

• si $a = e$, on obtient $u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$

2,5 pt

par la formule de Stirling, on a:

$$u_n = \frac{e^n n!}{n^n} \sim \frac{e^n}{n^n} \cdot \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n} = \sqrt{2\pi n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc la série est grossièrement divergente.

Exercice 2

pour $n \geq 1$: $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 1-nx, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ 3

① ma $\cdot f_1(x) = 1-x$

$\cdot f_2(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

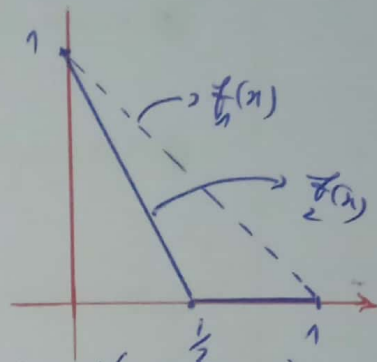
①

Convergence simple

\cdot pour $x=0$, ma $f_n(0) = \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

\cdot pour $0 < x \leq 1$, fixé, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

En effet: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que: $N > \frac{1}{x}$ (Axiome d'Archimède).



donc $\forall n \geq N$: $n > \frac{1}{x} \Leftrightarrow x > \frac{1}{n}$ ($f_n(x)$ s'annule à partir de rang N)

Alors $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$: $f_n(x) = 0$

1,5

Finalement: $f_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$ sur $[0,1]$ avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Convergence uniforme

on a $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur $[0,1]$.

Convergeant vers une fonction f qui est discontinue. 1,5

En $x=0$. Alors cette convergence n'est pas uniforme.

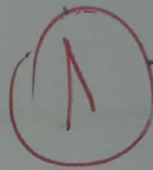
Exercice 3) $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ et $F_n(x) = \int_0^x f_n(x) dx$

1) la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$:

ma f_n est dérivable et ma

$$f_n'(x) = 2x e^{-nx} - nx^2 e^{-nx} = x e^{-nx} (2 - nx)$$

x	0	$\frac{2}{n}$	$+\infty$
$f_n'(x)$		+	-
$f_n(x)$	0	$f_n(\frac{2}{n})$	0



onc $\|f_n\|_{\infty} = f_n(\frac{2}{n}) = \frac{4e^{-2}}{n^2}$

or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{4e^{-2}}{n^2}$ est convergente donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ est normalement convergente

sur $[0, +\infty[$.

2) la continuité de la somme

ma pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$

• $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, +\infty[$

Alors d'après le théorème de continuité de la somme, f est continue sur $[0, +\infty[$.

3) $\forall x \in]0, +\infty[$: $f(x) = \sum_{n \geq 1} x^2 e^{-nx} = x^2 \sum_{n \geq 1} (e^{-x})^n = x^2 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x - 1}$

pour $x=0$, $f(0) = 0$

Int $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$

② Calculons $F_n(x)$

$$F_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt = \left[\frac{t^2}{n} e^{-nt} \right]_0^x + \frac{2}{n} \int_0^x t e^{-nt} dt$$

$$= -\frac{x^2}{n} e^{-nx} + \frac{2}{n} \left[\frac{t}{n} e^{-nt} \right]_0^x + \frac{1}{n} \int_0^x e^{-nt} dt$$

$$= -\frac{x^2}{n} e^{-nx} + \frac{2}{n} \left[-\frac{x}{n} e^{-nx} - \frac{1}{n^2} [e^{-nx} - 1] \right]$$

$$= -\frac{x^2}{n} e^{-nx} - \frac{2x}{n^2} e^{-nx} - \frac{2}{n^3} e^{-nx} + \frac{2}{n^3}$$

Etape 1

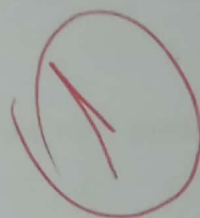
$$u = t^2 \rightarrow u' = 2t$$

$$v' = e^{-nt} \rightarrow v = -\frac{1}{n} e^{-nt}$$

Etape 2

$$u = t \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-nt} \rightarrow v = -\frac{1}{n} e^{-nt}$$



③ Montrons que $\sum_{n \geq 1} F_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ :

$$\text{ma } |F_n(x)| \leq \frac{1}{n} x^2 e^{-nx} + \frac{2x}{n^2} e^{-nx} + \frac{2}{n^3} e^{-nx} + \frac{2}{n^3}$$

$$\leq \frac{4e^{-2}}{n^3} + \frac{2e^{-1}}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{2}{n^3}$$

$$\leq \frac{6}{n^3}$$



or la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{6}{n^3}$ est convergente donc $\sum_{n \geq 1} F_n$ est normalement

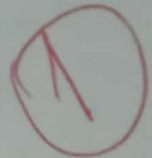
convergente sur $[0, +\infty[$.

c) on pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$

• on a $\sum_{n \geq 1} F_n$ Cvg normalant donc uniformment sur $[0, +\infty[$.

• par chaque $n \text{ fixe}$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = \frac{2}{n^3}$.

donc d'après théorème d'interversion (limite / somme)



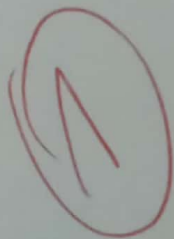
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$$

③ Montrons que $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

on a

• par chaque $n \text{ fixe}$, f_n est Riemann intégrable sur $[0, x]$

• $\sum_{n \geq 1} f_n$ est normalant cvg sur $[0, x]$.



donc d'après le théorème d'interversion (somme / intégrale)

~~$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$$~~

④ on a $\forall x \in [0, +\infty[$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{t^2}{e^t - 1} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x f_n(t) dt$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt$$

$$= \int_0^x f(t) dt$$

et la limite demandée de la question

② ③