Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

2ème année MATH- Semestre 1
Contrôle continu : Analyse 3
Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (6 Pts)
Étudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum \sqrt{\frac{2^n}{3^n+n}}, \qquad\qquad 2) \sum (-1)^n \frac{n}{\ln(2n)}$$

Exercice 2. (7 Pts)
Soit la série de fonction de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x \geq 0.$$

1) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
2) Montrer que $S(x) = \sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ est dérivable sur $[0, 1[$.
3) En déduire que la fonction S est croissante sur $[0, 1[$.

Exercice 3. (7 Pts)
Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+2)}.$$

1) Déterminer le rayon de convergence R.
2) En déduire le domaine de convergence.
3) On pose

$$S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+2)}.$$

Calculer la somme de $S'(x)$ et en déduire la somme de $S(x)$.
4) Exprimer la somme de $f(x)$ et en déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n(n+2)}$$

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

$2^{ème}$ année M.I - Semestre 1

Corrigé du contrôle continu : Analyse 3

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (6 Pts)

1)$\sum \sqrt{\dfrac{2^n}{3^n+n}}$

On remarque que

$$\frac{2^n}{3^n+n} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Donc,

$$\sqrt{\frac{2^n}{3^n+n}} \sim \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Puisque $\sum \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^n$ converge (série géométrique de raison $0 < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$) **(1 Pt)**, alors par le critère d'équivalence, $\sum \sqrt{\dfrac{2^n}{3^n+n}}$ converge. **(1 Pt)**

2) $\sum (-1)^n \dfrac{n}{\ln(2n)}$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \dfrac{n}{\ln(2n)} = \pm\infty \neq 0.$ **(1.5 Pts)**

Donc, on n'a pas la condition nécéssaire de convergence et ceci implique que la série $\sum (-1)^n \dfrac{n}{\ln(2n)}$ diverge. **(1.5 Pts)**

Exercice 2. (7 Pts)

Soit

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x \geq 0.$$

1)Premièrement, on remarque que pour $x = 1$, on a la série $\sum \dfrac{1}{2n}$ qui diverge. **(0.5 Pt)**

Pour $x \neq 1$, sur l'intervalle $[0, 1[$, on a

$$\left|\frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}\right| \leq x^n \quad \textbf{(1Pt)}$$

Puisque $\sum x^n$ est une série géométrique qui converge, alors $\sum \dfrac{x^n}{n(x^{2n}+1)}$ converge absolument donc simplement sur $[0, 1[$. **(0.5 Pt)**

Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, on a

$$\left|\frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}\right| \leq \frac{x^n}{x^{2n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^n. \quad \textbf{(1Pt)}$$

Puisque $x > 1$, alors $\frac{1}{x} < 1$ et $\sum \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ est une série géométrique qui converge. Ainsi, $\sum \dfrac{x^n}{n(x^{2n}+1)}$ converge absolument donc simplement sur $]1, +\infty[$. **(0.5 Pt)**

2) Montrons que $S(x)$ est dérivable sur $[0,1[$.

D'après la première question, notre série converge simplement sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. **(0.25 Pt)**
De plus, le terme général $u_n(x)$ est une fonction dérivable sur $[0,1[$. Il reste à montrer que $\sum (u_n(x))'$ converge uniformément sur $[0,a[$ avec $a \in]0,1[$. **(0.25 Pt)**
Alors,

$$\sum \left(\frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}\right)' = \sum \frac{n^2x^{n-1}(1+x^{2n}) - 2n^2x^nx^{2n-1}}{n^2(1+x^{2n})^2}$$
$$= \sum \frac{x^{n-1}(1-x^{2n})}{n^2(1+x^{2n})^2}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

On remarque que

$$\forall x \in [0,a[, \quad \left|\frac{x^{n-1}(1-x^{2n})}{(x^{2n}+1)^2}\right| \leq a^{n-1}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

Puisque $\sum a^{n-1}$ converge, alors $\sum (u_n(x))'$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1[$. **(0.25 Pt)**
Ainsi, d'après le théorème du cours sur la dérivabilité des séries de fonctions, $S(x)$ est dérivable sur $[0,1[$. **(0.25 Pt)**
3) Il suffit de remarquer que pour $x \in [0,1[$, on a $1-x^{2n} > 0$, c'est à dire que la fonction $S'(x) \geq 0$. Ainsi, S est une fonction croissante. **(0.5 Pt)**

Exercice 3. (7 Pts)

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+2)}$

1) Le rayon de convergence R est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+3)} \cdot \frac{n(n+2)}{2^n}\right| = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

2) Pour $x = 1$, on a la série numérique $\displaystyle\sum \frac{2^n}{n(n+2)}$ qui diverge par le critère de d'Alembert. **(0.5 Pt)**
Pour $x = -1$, on a la série numérique $\displaystyle\sum \frac{2^n(-1)^n}{n(n+2)}$ qui diverge car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n(n+2)} = +\infty \neq 0$. **(0.5 Pt)**
Ainsi, le domaine de convergence est

$$D = \left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[. \quad \textbf{(0.25Pt)}$$

3) On a $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+2}}{n(n+2)}$
Pour $x \in D$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n} \quad \textbf{(0.5Pt)}$$
$$= -x\ln(1-2x). \quad \textbf{(1Pt)}$$

Ainsi, $S(x) = -\int x\ln(1-2x)dx$.
En utilisant une intégration par partie, $\int uv' = uv - \int uv'$, on obtient

$$\begin{cases} u = \ln(1-2x) & \Rightarrow u' = -\frac{2}{1-2x}, \\ v' = x & \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

C'est à dire,

$$S(x) = -\left[\frac{x^2}{2}\ln(1-2x) + \int \frac{x^2}{1-2x}dx\right].$$

D'autre part,

$$\frac{x^2}{1-2x} = (-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) + \frac{1/4}{1-2x}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{x^2}{2}\ln(1-2x) + \int \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{(1-2x)}\right) dx \\ &= -\frac{x^2}{2}\ln(1-2x) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\ln(1-2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sachat que $S(0) = 0$, alors $C = 0$. Ainsi,

$$S(x) = \frac{1}{8}(1-4x^2)\ln(1-2x) + \frac{1}{4}(x^2+x). \quad (\mathbf{2Pts})$$

4) Pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = \frac{S(x)}{x^2} = \frac{1}{8x^2}(1-4x^2)\ln(1-2x) + \frac{1}{4}(\frac{x^2+x}{x^2}). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Remarquons aussi que $f(0) = \lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x^2} = 0.$ $\quad$ **(0.25 Pt)**

Maintenant, pour obtenir la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n(n+2)}$, il suffit de remplacer $x = -\frac{1}{4}$. $\quad$ **(0.25 Pt)**

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(-\frac{1}{4}) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(-\frac{1}{4})^n}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n(n+2)} \\ &= \frac{3}{2}\ln(\frac{3}{2}) - \frac{3}{4}. \quad (\mathbf{0.25Pt}) \end{aligned}$$