Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen de Rattrapage.
Jeudi 08/07/2021 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (07pts) On considère la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(6 + 5x - x^2\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer f', puis déterminer son développement en série entière centrée en 0. Préciser son rayon de convergence ainsi que son domaine de convergence.
3. En déduire le développement en série entière centrée en 0 de la fonction f. Préciser aussi le rayon de convergence ainsi que le domaine de convergence.

Exercice 2 : (08pts) Soit g la fonction 2π-périodique dont la restriction à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ est donnée par

$$g(x) = |\sin x|.$$

1. Déterminer la série de Fourier de g sous sa forme réelle, qu'on notera S_g.
2. Sur quel ensemble la série S_g converge-t-elle vers g ?
3. La convergence de S_g est-elle uniforme ?
4. En déduire la valeur de chacune des sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \qquad , \qquad B = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$$

Exercice 3 : (05pts) Étudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$J = \int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] \, dx$$

2ème année - Licence de Mathématiques - S3 - 2020/2021.

Module : "Analyse III" - Rattrapage - Corrigé.

Exercice 1 : (07 pts) $f(x) = \ln(6+5x-x^2)$

1°/ Domaine de f : f est définie pour tout x tel que

$$6+5x-x^2 > 0.$$

Les racines de ce trinôme du second degré sont :

$\Delta = 25+24 = 49 = 7^2$; et $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 7}{-2}$ d'où

$x_1 = -1$ et $x_2 = 6$ 1pt

$- \;\underset{-1}{0}\; + \;\underset{6}{0}\; -$ signe du trinôme

Donc $\boxed{D_f =]-1, 6[}$

2°/ Développement de f' : $f'(x) = \dfrac{5-2x}{6+5x-x^2} = \dfrac{5-2x}{(1+x)(6-x)}$

Décomposons d'abord f' en élément simple :

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{6-x}}$$ 1pt

On a : $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$ si $|x| < 1$

et $\dfrac{1}{6-x} = \dfrac{1}{6(1-\frac{x}{6})} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{6^{n+1}}$ si $|x| < 6$ 0,5pt

Pour que les deux séries entières convergent, on doit prendre $|x| < 1$, et donc

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n\geq 0} \left[(-1)^n - \frac{1}{6^{n+1}}\right] x^n, \text{ avec } R = 1 \text{ et le domaine de convergence } U =]-1, 1[}$$ 1,5pt

3°/ Développement de f : Dans le cours, on a montré qu'on peut, dans son domaine de convergence, intégrer terme à terme une série entière sur un compact. Ainsi, si $x \in]-1,1[$, on peut intégrer de 0 à x, d'où :

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \sum_{n\geq 0} \left[(-1)^n - \frac{1}{6^{n+1}}\right] \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ 1pt

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + \sum_{n\geq 0} \left[(-1)^n - \frac{1}{6^{n+1}}\right] \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Or $f(0) = \ln 6$, donc

$$\boxed{f(x) = \ln 6 + \sum_{n\geq 0} \left[(-1)^n - \frac{1}{6^{n+1}}\right] \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$ 1pt

Le rayon de convergence est toujours $\boxed{R=1}$.
On peut le montrer par la règle de d'Alembert par ex.
On remarque que la série de f converge pour $x=1$
(série alternée et convergence absolue pour $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{6^{n+1}(n+1)}$).
Par contre elle diverge en $x=-1$ (Présence du terme
$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{n+1}$, qui diverge).

En définitive, le domaine de convergence est $\boxed{]-1,1]}$ 1pt

---

Exercice 2 : (08 pts) $g(x) = |\sin x|$ sur $[-\pi,\pi]$; 2π-périodique.

1/ Série de Fourier de g :

g est pair car $g(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = g(x)$. 0,5

donc $\boxed{\forall n \geq 1,\ b_n = 0}$

* $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\sin x)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\cos x\right]_0^{\pi}$ 0,5

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[1+1\right] = \boxed{\frac{4}{\pi}}$$

$\underline{n \geq 1}$ * $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\cos nx)(\sin x)\, dx$

On utilise $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

et $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta .$$

d'où $2(\sin x)(\cos nx) = \sin\left((n+1)x\right) + \sin\left((1-n)x\right)$

et $a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right]$$

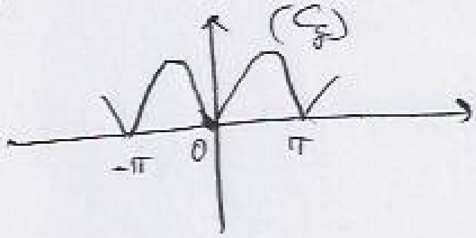
$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2k+1} = 0, & \forall k \in \mathbb{N} \\ a_{2k} = \dfrac{-4}{\pi(4k^2-1)}, & \forall k \geq 1 . \end{cases}$$ 0,5

En définitive :

$$\boxed{S_g(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}}$$ 0,5

3

2°/ Convergence de S_g : D'après le cours, la série de Fourier converge vers $g(x)$ en chaque point de continuité de g.



Or g est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ S_g(x) = g(x)}$ 2pts

3°/ Convergence uniforme de S_g ? D'après l'expression de la série de Fourier S_g, son terme général vérifie :

$$\left| \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1} \right| \leq \frac{1}{4k^2-1}, \quad \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1} \right| \leq \frac{1}{4k^2-1}$$ 2pts

Ainsi la convergence de la série numérique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{4k^2-1}$ implique que S_g converge normalement sur $\mathbb{R}$, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

4°/ Calcul de A et B :

* Pour A : $0 = g(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4k^2-1}$

$$\Rightarrow \boxed{A = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4k^2-1} = 1/2}$$ 1pt

* Pour B : l'identité de Parseval donne :

$$\frac{(4/\pi)^2}{2} + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}}$$ 1pt

4

Exercice 3 : (05 pts) $\quad J = \int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] dx.$

On peut appliquer dès le départ le changement de variable $t = 1/x$, qui est une bijection entre $\left]\frac{2}{\pi}, +\infty\right[$ et $\left]0, \pi/2\right[$. D'où 1pt

$$\boxed{J = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln[\cos t]}{t^2} dt}$$ 0,5pt

La fonction $f(t) = \dfrac{\ln[\cos t]}{t^2}$ est définie sur $]0, \pi/2[$ $(\cos t > 0)$ et continue. Donc le caractère impropre de l'intégrale se situe en $t=0$ et $t = \pi/2$. 0,5

* Etude en $t=0$: $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$, $t \to 0$

$$\Rightarrow \ln[\cos t] = -\frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{t \to 0^+} f(t) = -1/2}$$ 1,5pt

donc f est prolongeable par continuité en 0^+, et donc l'intégrale converge en $t=0$.

* Etude en $t = \pi/2$: $\cos t = \cos\frac{\pi}{2} - \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\left(t-\pi/2\right)^2\right)$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - t\right) + O\left(\left(t - \pi/2\right)^2\right)$$

Ainsi qd $t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, $f(t) \sim \frac{4}{\pi^2} \ln\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ 1,5pt

et $\int_a^{\pi/2} \ln\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt$ converge. D'où

$$\boxed{J \text{ converge en } \pi/2}.$$

Finalement J est convergente. 5