Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen de Rattrapage.
Lundi 16/11/2020 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (08pts) Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 2\lambda x + 1}$$

où λ est un paramètre réel fixé. Déterminer, suivant les valeurs de λ, le développement en série entière, centrée en 0, de la fonction g. Donner dans chaque cas le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 2 : (08pts) Soit $0 < a < \pi$ un paramètre réel. On considère la fonction 2π-périodique définie par :

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad [0, \pi - a] \\ 1 & \text{sur} \quad]\pi - a, \pi + a[\\ 0 & \text{sur} \quad [\pi + a, 2\pi] \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f_a sur $[0, 2\pi]$, puis sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f_a.
3. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2}$.

Exercice 3 : (04pts) Dire (avec justifications) si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes :

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx \qquad\qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$$

2ème année de Licence de Mathématiques - 2019/2020.

Module: "Analyse 3" - S3 - Epreuve de Rattrapage.

Corrigé.

Exercice 1: (08pts) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2\lambda x + 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ paramètre.

Pour développer g en série entière, centrée en 0, il faut d'abord décomposer g en fractions simples pour pouvoir utiliser les séries géométriques. Mais avant, il faut factoriser le dénominateur $T(x) = x^2 - 2\lambda x + 1$. 01pts

$\Delta' = \lambda^2 - 1$. On a donc trois cas:

* $\Delta' > 0 \iff \lambda^2 - 1 > 0 \iff \lambda^2 > 1 \iff |\lambda| > 1 \iff \lambda \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

T admet deux racines réelles distincts:

$x_1 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$ et $x_2 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$.

1er sous-cas: $\boxed{\lambda > 1}$ on pose $\lambda = ch\theta$, $\theta > 0$

d'où $\lambda^2 - 1 = ch^2\theta - 1 = sh^2\theta$ et donc

$$x_1 = e^{-\theta} \quad \text{et} \quad x_2 = e^{\theta}$$

Ainsi $T(x) = (x - e^{-\theta})(x - e^{\theta})$ et donc

$$g(x) = \left(\frac{-1}{x - e^{-\theta}} + \frac{1}{x - e^{\theta}}\right)\frac{1}{2sh\theta}$$

$$= \frac{1}{2sh\theta}\left(\frac{e^{\theta}}{1 - xe^{\theta}} - \frac{e^{-\theta}}{1 - xe^{-\theta}}\right)$$

$$= \frac{1}{2sh\theta}\left[e^{\theta}\sum_{n \geq 0} e^{n\theta}x^n - e^{-\theta}\sum_{n \geq 0} e^{-n\theta}x^n\right]$$ 1pt

$$\boxed{g(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{sh(n+1)\theta}{sh\theta}\, x^n}$$

Les deux séries géométriques convergent si et seulement si $|xe^{\theta}|<1$ et $|xe^{-\theta}|<1 \Rightarrow |x| < \min(e^{\theta}, e^{-\theta})$

Comme $\theta > 0$, alors $e^{-\theta} < e^{\theta}$ d'où $\boxed{R = e^{-\theta}}$ 0,5pt

On peut exprimer le rayon de convergence à l'aide de λ par $\boxed{R = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}}$.

<u>2ème sous-cas</u> : $\boxed{\lambda < -1}$ On pose $\lambda = -\operatorname{ch}\theta$, $\theta > 0$

d'où $x_1 = -e^{\theta}$ et $x_2 = -e^{-\theta}$

et donc $T(x) = (x + e^{\theta})(x + e^{-\theta})$. Ainsi

$$g(x) = \frac{1}{2\operatorname{sh}\theta}\left(\frac{1}{x + e^{-\theta}} - \frac{1}{x + e^{\theta}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{sh}\theta}\left(\frac{e^{\theta}}{1 + xe^{\theta}} - \frac{e^{-\theta}}{1 + xe^{-\theta}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{sh}\theta}\left[e^{\theta}\sum_{n\geq 0}(-1)^n e^{n\theta} x^n - e^{-\theta}\sum_{n\geq 0}(-1)^n e^{-n\theta} x^n\right]$$

$$\boxed{g(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\operatorname{sh}(n+1)\theta}{\operatorname{sh}\theta}\, x^n}$$ 1pt

Comme précédemment la convergence a lieu si et ssi $|xe^{\theta}|<1$ et $|xe^{-\theta}|<1 \Leftrightarrow |x| < \min(e^{\theta}, e^{-\theta}) = e^{-\theta}$

$$\boxed{R = e^{-\theta} = -(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})}$$ 0,5pt

** $\Delta' = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$.

1er sous-cas : $\boxed{\lambda = 1}$, $T(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Donc $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = + \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$

$$\boxed{g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n} \quad \boxed{R = 1}$$

1,5 pt

2ème sous-cas : $\boxed{\lambda = -1}$; $T(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

Donc $g(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n\right)' = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$

$$\boxed{g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n} \quad \boxed{R = 1}$$

1,5 pt

*** $\Delta' < 0 \iff \lambda^2 - 1 < 0 \iff |\lambda| < 1$
$\iff -1 < \lambda < 1$. On pose $\lambda = \cos\theta$, $0 < \theta < \pi$

$T(x) = x^2 - 2(\cos\theta) x + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$

$g(x) = \frac{1}{2\sin\theta}\left(\frac{1}{x - e^{i\theta}} - \frac{1}{x - e^{-i\theta}}\right) = \frac{1}{2\sin\theta}\left(\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{1 - xe^{-i\theta}}\right)$

$= \frac{1}{2\sin\theta}\left[e^{i\theta}\sum_{n\geq 0} e^{in\theta} x^n - e^{-i\theta}\sum_{n\geq 0} e^{-in\theta} x^n\right]$

$$\boxed{g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} x^n}$$

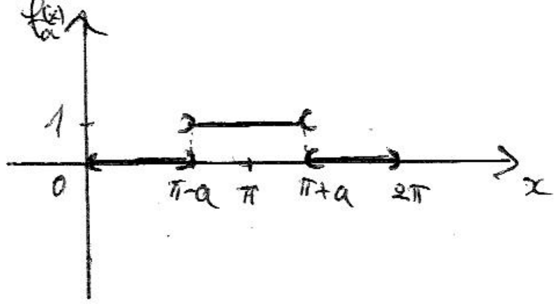
Convergence ssi $|xe^{i\theta}| < 1$ et $|xe^{-i\theta}| < 1$

1,5 pt

ce qui est équivalent à $|x| < 1$, donc $\boxed{R = 1}$

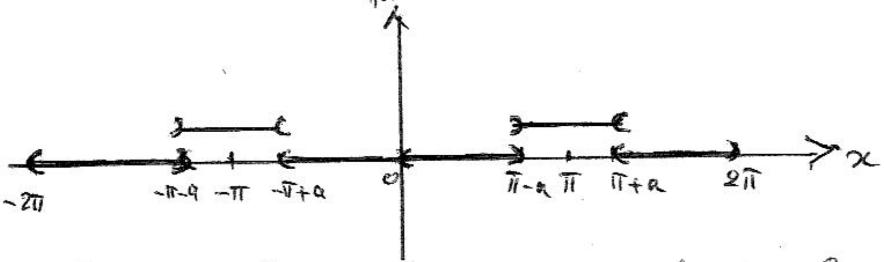
Exercice 2 : (08 pts) $0<a<\pi$, $f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } [0,\pi-a] \\ 1 & \text{sur }]\pi-a,\pi+a[\\ 0 & \text{sur } [\pi+a, 2\pi] \end{cases}$.

1°/ Graphe de f_a : sur $[0,2\pi]$:



1

Comme f_a est 2π-périodique, alors le graphe sur $[-2\pi,0]$ est la réplique de celui sur $[0,2\pi]$ par translation à gauche :



1

2°/ Série de Fourier de f_a : On remarque d'après le deuxième graphe, que f_a est paire. Donc les coefficients $b_n = 0$. Reste à calculer les a_n. $\forall n \geq 0$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_a(x)\cos nx\,dx$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_a(x)\cos nx\,dx \quad \text{car } f_a \text{ est paire.}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{\pi-a}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi-a}^{\pi} \quad (\text{si } n \neq 0)$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\sin n(\pi-a) = (-1)^{n+1}\frac{2\sin na}{n\pi}$$

Pour $n=0$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{\pi-a}^{\pi} dx = \frac{2a}{\pi}$. La série de Fourier s'écrit

$$\boxed{S_{f_a}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos nx = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{\sin na}{n}\cos nx.}$$ 3

3°/ Calcul de la somme $A = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(na)}{n^2}$.

La forme de cette somme suggère l'utilisation de l'égalité de Parseval-Plancherel :

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(|a_n|^2 + \underbrace{|b_n|^2}_{=0}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_a(x)|^2\,dx.$$

$\int_{-\pi}^{\pi}|f_a(x)|^2\,dx = 2\int_{\pi-a}^{\pi} dx = 2a$. D'où

$$\frac{4a^2}{2\pi^2} + \sum_{n\geq 1}\frac{4\sin^2(na)}{n^2\pi^2} = \frac{2a}{\pi}$$

$$\Longrightarrow \boxed{A = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{2a}{\pi} - \frac{2a^2}{\pi^2}\right] = \frac{a(\pi-a)}{2}}$$ 3

Exercice 3 : (04 pts). $\ast$ Etude de $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$.

On a $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = (\ln x)'\Big|_{x=1} = 1$.

Alors $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = 1$. Donc la fonction est prolongeable par continuité au pt $x=1$; I est donc convergente en 1. 2pts

$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\ln x} = \frac{-1}{-\infty} = 0$; elle est aussi prolongeable par continuité en 0, et donc elle est convergente en 0. I converge

$\ast$ Etude de $J = \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.

- $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x = 0 \Longrightarrow$ sur $]0,1]$, $\sqrt{x}\ln x$ bornée, donc sur $]0,1]$ $\left|\frac{\ln x}{1+x^2}\right| = \frac{|\sqrt{x}\ln x|}{(1+x^2)\sqrt{x}} \leq \frac{M}{\sqrt{x}}$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge 2pts
  donc $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ converge.
- $\lim \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \left|\frac{\ln x}{1+x^2}\right| = \left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\right| \leq M/x^{3/2}$ 5
  et $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ converge $\Longrightarrow$ J converge.