

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen de Contrôle Continu.
Jeudi 09/01/2020 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (05pts) Soient a et b deux réels. On pose

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n+1}, \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ si et seulement si $a + b + 1 = 0$.
2. Déterminer ensuite les valeurs de a et b pour que la série numérique de terme général u_n soit convergente.

Exercice 2 : (07pts) On se propose d'étudier les convergences simple et normale de la série de fonctions de terme général $w_n(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{n}\right) - \cos\left(\frac{x}{n}\right)$, $n \geq 1$.

1. Soit $f(t) = \operatorname{ch}(t) - \cos(t)$. Donner l'expression du développement de Taylor de f au point 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que la série de terme général $w_n(x)$ est simplement convergente sur \mathbb{R} .
3. A l'aide du même développement, montrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[-a, a]$, $a > 0$.

Exercice 3 : (08pts) Soit $a \in]0, \pi[$ un paramètre réel fixé. On considère la série entière réelle de terme général

$$v_n(x) = \frac{\cos(na)}{n!} x^n, \quad n \geq 0.$$

1. Déterminer le domaine de convergence de cette série.
2. Déterminer l'expression $F(x)$ de sa somme.
3. Résoudre ensuite dans \mathbb{R} l'équation $F(x) = 0$.

2^{ème} année de Licence Mathématiques - 2019/2020.

Module: "Analyse III" - Examen de Contrôle Continu.

Corrigé.

Exercice 1: (05 pts) $a, b \in \mathbb{R}$; $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n+1}$, $n \geq 1$.

1°/ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \Leftrightarrow a+b+1=0$: Une manière simple de le faire est la suivante;

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n} + a[\sqrt{n-1} - \sqrt{n} + \sqrt{n}] + b[\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \sqrt{n}] \\ &= (1+a+b)\sqrt{n} + a(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) + b(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= (1+a+b)\sqrt{n} + \frac{a}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} + \frac{b}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+a+b)\sqrt{n}$ car les deux autres termes ont pour limite 0, $\forall a, b$.

Donc si $1+a+b=0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; et si $1+a+b \neq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm \infty$ (cela dépend du signe de $1+a+b$) c.à.d.

2°/ Convergence de la série $\sum u_n$: On procède par développement asymptotique des racines carrées.

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + t^2 \varepsilon_1(t), \quad t \in V(0)$$

$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + t^2 \varepsilon_2(t), \quad \text{Donc}$$

$$\sqrt{n-1} = \sqrt{n(1-\frac{1}{n})} = \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}} \varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n(1+\frac{1}{n})} = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}} \varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$u_n = \frac{b-a}{2\sqrt{n}} - \frac{b+a}{8n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}} \varepsilon_3\left(\frac{1}{n}\right)$$

Si $b \neq a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} u_n = \frac{b-a}{2} (\neq 0)$ et la série diverge par le critère de Riemann.

Donc il faut que $b=a$, or $a+b+1=0 \Rightarrow \boxed{a=b=-1/2}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} u_n = 1/8$.

cond. nécessaire de convergence.

2pts

3pts

1

Exercice 2: (07pts)

1^o $f(t) = \cosh t - \cos t$. On sait que $f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \dots$

Or $f'(t) = \sinh t + \sin t$; $f''(t) = \cosh t + \cos t$.

et $f'''(t) = \sinh t - \sin t$ et donc

$$f(t) = t^2 + \frac{t^3}{6} [\operatorname{sh}(\theta t) - \sin(\theta t)] ; 0 < \theta < 1$$

2^o $w_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x^2}{n^2} + \frac{x^3}{6n^3} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{\theta x}{n}\right) - \sin\left(\frac{\theta x}{n}\right) \right]$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a $\left| \frac{\theta x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 w_n(x) = x^2$, ceci prouve la convergence

de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} w_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, par le critère de Riemann.

3^o Prenons maintenant $x \in [-a, a]$, c'est-à-dire $|x| \leq a$. Alors

$$\left| \frac{\theta x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n} \Rightarrow \left| \operatorname{sh}\left(\frac{\theta x}{n}\right) \right| \leq e^{\left| \frac{\theta x}{n} \right|} \leq e^{a/n}$$

et donc $|w_n(x)| \leq \frac{a^2}{n^2} + \frac{a^3}{6n^3} (e^{a/n} + 1)$ ($|\operatorname{sh}\left(\frac{\theta x}{n}\right)| \leq 1$)

$$\Rightarrow \sup_{x \in [-a, a]} |w_n(x)| \leq \frac{a^2}{n^2} + \frac{a^3}{6n^3} (e+1) \text{ si } n \geq [a]+1,$$

La série de terme général α_n est convergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \alpha_n = a^2$ (critère de Riemann). Donc la série $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [-a, a]} |w_n(x)|$ est convergente.

Ceci est bien la convergence normale recherchée.

Exercice 3: (08pts) $a \in]0, \pi[$; $v_n(x) = \frac{\cos(na)}{n!} x^n$, $n \geq 0$.

1°/ Domaine de convergence: Il est facile de voir que

$$|v_n(x)| \leq \underbrace{\frac{|x|^n}{n!}}_{h_n(x)} ; h_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

La série de terme général $h_n(x)$ est entière, avec $c_n = \frac{1}{n!}$. Donc

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc le rayon de convergence de } \sum h_n(x)$$

3pts

est $R = \infty$. Cela veut dire que $\forall x \geq 0$, $\sum h_n(x)$ converge.

Or elle majorise $|v_n(x)|$, donc $\sum v_n(x)$ est absolument convergente, $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc le domaine de convergence $\boxed{D = \mathbb{R}}$

2°/ Expression de $F(x)$: $F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(na)}{n!} x^n$

On a $\cos(na) = \frac{1}{2}(e^{ina} + e^{-ina})$; d'où

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(e^{ia} x)^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(e^{-ia} x)^n}{n!} = \frac{1}{2} [e^{xe^{ia}} + e^{xe^{-ia}}] \\ &= \frac{1}{2} [e^{x(\cos a + i \sin a)} + e^{x(\cos a - i \sin a)}] = \frac{e^{x \cos a}}{2} [e^{ix \sin a} + e^{-ix \sin a}] \end{aligned}$$

3pts

$$\text{Ainsi } \boxed{F(x) = e^{x \cos a} \cos(x \sin a)}$$

3°/ Résolution de $F(x) = 0$ $F(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x \sin a) = 0$

$$\Leftrightarrow x \sin a = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Comme $a \in]0, \pi[$, alors $\sin a \neq 0$ d'où

$$\text{les solutions ont les } \boxed{x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2 \sin a}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

2pts