



Analyse III      **Epreuve finale (Durée 02h)**  
**Sujet & corrigé**

**Exercice 01 :** 07 pts

I. Soit la série entière réelle :  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ .

- Déterminer le rayon R et le domaine de convergence D de la série entière.
- Pour tout  $x \in D$ , soit  $S(x)$  la somme de la série entière, montrer qu'elle vérifie les équations différentielles:  $S(x) - S''(x) = \cos x$  et  $S(x) + S''(x) = \cosh x$ , en déduire l'expression de  $S(x)$  sans le signe  $\sum$ .

3. Calculer les sommes des séries  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(4n)!}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{4^n}{(4n-1)!}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{(4n-3)!}$ .

II.

1. Développer en série entière autour de l'origine la fonction  $f(x) = \frac{3(\cosh 2x - 2\sin^2 x - 1)}{4x^4}$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$ . Préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

2. Montrer que l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$  converge et donner sa valeur sous forme de série.

**Exercice 02:** 07 pts

On considère la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de période  $P = 2\pi$  et telle que :

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad -\pi < x < \pi$$

- Dessiner le graphe de  $f$  (on prendra au moins  $x \in [-2\pi, 2\pi]$ ).
- Calculer la série de Fourier associée à  $f$ , étudier sa convergence et donner sa limite. Converge-t-elle uniformément sur  $\mathbb{R}$  ?
- Calculer les sommes :  $S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ,  $S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  et  $S_3 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ ,  $S_4 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^4}$
- Trouver une solution particulière de classe  $C^2$  et de période  $P = 2\pi$  de l'équation différentielle (E):  $y'' - 3y = f(x)$ .

Question facultative : Donner la solution générale de (E).

**Exercice 03 :** 06 pts

Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{\sqrt{(x+5)\arctan x^2}} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(x) dx}{\sqrt{\pi - 2\arcsin x}} \quad I_3 = \int_0^{+\infty} 1 + 2x^2 \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$$

# Corrigé

## Exercice 01 : 07 pts

I. La série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$  avec  $\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n, a_{4n} = \frac{1}{(4n)!}, a_{4n+1} = a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0 \end{cases}$

**1,5pts** 1. Le rayon et domaine de convergence

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{4n}|^{\frac{1}{4n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{4n}{e} \frac{\ln(8\pi n)}{8n}} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{4n+k}|^{\frac{1}{4n+k}} = 0$  pour  $k = 1, 2, 3$ .

Alors  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ , alors le rayon  $R = +\infty$ , ainsi le domaine de convergence  $D = \mathbb{R}$

**02pts** 2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , soit  $S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = 1 + \frac{x^4}{(4)!} + \frac{x^8}{(8)!} + \dots$

$$S'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} = \frac{x^3}{(3)!} + \frac{x^7}{(7)!} + \dots$$

$$S''(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} = \frac{x^2}{(2)!} + \frac{x^6}{(6)!} + \dots$$

- $S(x) + S''(x) = 1 + \frac{x^2}{(2)!} + \frac{x^4}{(4)!} + \frac{x^6}{(6)!} + \frac{x^8}{(8)!} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x \dots \dots \dots (1)$
- $S(x) - S''(x) = 1 - \frac{x^2}{(2)!} + \frac{x^4}{(4)!} - \frac{x^6}{(6)!} + \frac{x^8}{(8)!} - \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \dots \dots \dots (2)$
- $(1) + (2) = 2S(x)$  alors  $S(x) = \frac{\cos x + \cosh x}{2}$

**1,5pts** 3. Calcul de sommes

$$S(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(4n)!} = \frac{\cos 1 + \cosh 1}{2},$$

$$S'(\sqrt{2}) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{2}^{4n-1}}{(4n-1)!} \text{ alors } \sum_{n \geq 1} \frac{4^n}{(4n-1)!} = \sqrt{2} S'(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \left( \frac{\sinh \sqrt{2} - \sin \sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{(4n-3)!} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{4n-3-1}{(4n-3)!} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(4n-2)!} - \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(4n-3)!} = \frac{1}{4} (S''(1) - S^{(3)}(1)).$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{(4n-3)!} = \frac{1}{8} (\cosh 1 - \cos 1 - \sinh 1 - \sin 1) = \frac{1}{8} (e^{-1} - \cos 1 - \sin 1).$$

II. **1pt** 1.

$$\text{Pour } x \neq 0, f(x) = \frac{3(\cosh 2x - 2\sin^2 x - 1)}{4x^4} = \frac{3(\cosh 2x + \cos 2x - 2)}{4x^4} = \frac{6(S(2x) - 1)}{4x^4} = \frac{3}{2x^4} \sum_{n \geq 1} \frac{2^{4n} x^{4n}}{(4n)!}.$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{2^{4n} x^{4n-4}}{(4n)!} \text{ qui vérifie } f(0) = 1.$$

Le rayon de convergence est le même que le rayon de la série  $S(2x)$  ie  $R = +\infty$ .

**1pt** 2.  $\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \underset{v(0)}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$  est convergente.

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{2^{4n} x^{4n-4}}{(4n)! \sqrt{x}} dx = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1} \int_0^1 \frac{2^{4n} x^{4n-\frac{9}{2}}}{(4n)!} dx = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{2^{4n}}{(4n)! \left(4n - \frac{7}{2}\right)}$$

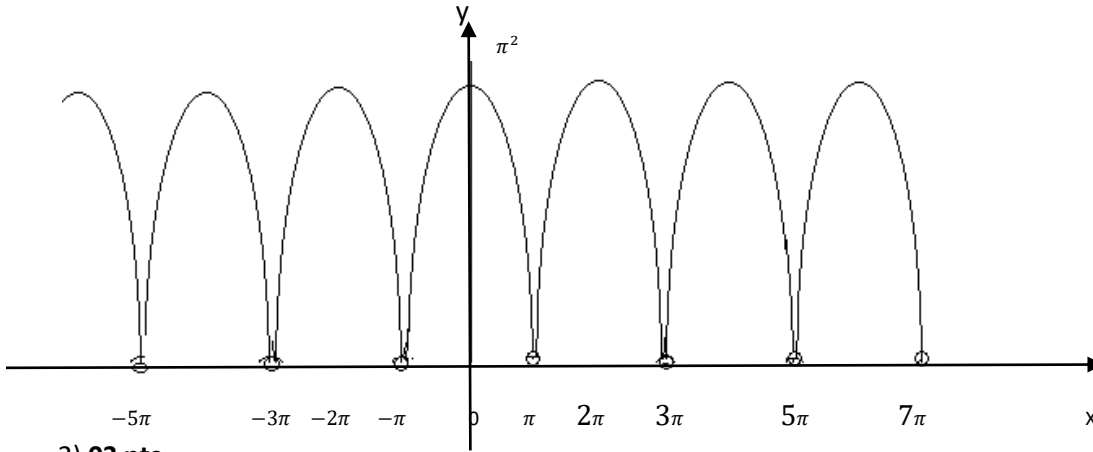
## Exercice 02: 07 pts

On considère la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de période  $P = 2\pi$  et telle que :

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad -\pi < x < \pi$$

I.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , paire et de période  $P = 2\pi$  et telle que  $f(x) = \pi^2 - x^2 \quad -\pi < x < \pi$

1) **0,75pt** le graphe de  $f$  :



2) **03 pts**

➤  $f$  est paire alors  $\forall n \geq 1 \quad b_n = 0$  et  $\forall n \geq 0 \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx$ .

$$\begin{aligned} \text{➤ } \forall n \geq 1 \quad a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - x^2) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \left[ (\pi^2 - x^2) \frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi + \int_0^\pi 2x \frac{\sin nx}{n} \, dx \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \left[ -x \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n^2} \, dx \right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}. \end{aligned}$$

$$\text{➤ } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - x^2) \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \left[ \pi^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^\pi \right) = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$\text{➤ } S(f(x)) = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$$

➤ Comme le montre le graphe, la fonction  $f$  est paire et périodique, continue partout sauf aux points  $x_k = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$  (elle n'est pas définie)

Il est évident que les conditions de Jordan sont vérifiées à savoir

- (i)  $f$  est bornée dans  $\mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq \pi^2$
- (ii)  $f$  est continue et croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  et continue et décroissante sur  $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$\text{Alors } S(f(x)) = f(x) \quad \forall x \neq x_k$$

$$S(f(x_k)) = \frac{f(x_k^+) + f(x_k^-)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 = f(x_k)$$

$$\text{Ainsi } S(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

➤  $\sum_{n \geq 1} |a_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2}$  converge, alors la série  $S(f(x))$  converge normalement donc uniformément dans  $\mathbb{R}$ .

3) **01,75pts** Calcul des sommes :  $S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ,  $S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  et  $S_3 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ ,  $S_4 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^4}$

$$\checkmark \quad S(f(0)) = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = f(0) = \pi^2 \Rightarrow S_1 = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\checkmark \quad S(f(\pi)) = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

➤ Application de l'égalité de Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n^2 = \frac{8\pi^4}{9} + 16 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x^4 + \pi^4 - 2\pi^2 x^2) \, dx = \frac{16\pi^4}{15}.$$

$$\text{alors } S_3 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^4 n^4} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^4} \quad \text{alors } S_4 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

II. **01.5pts** Soit  $y = y(x)$  une solution particulière de l'équation différentielle (E) :  $y''' - 3y = f(x)$

Si  $y$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et de période  $2\pi$  alors les conditions de Dirichlet sont satisfaites ( $y$  et  $y''$  sont continues et bornées dans  $\mathbb{R}$ ) donc  $y$  et  $y''$  sont développables en série de Fourier.

Comme  $f$  est paire ; il est évident de chercher une solution  $y$  de (E) qui soit paire car :  $y$  est paire  $\Rightarrow y''$  est paire  $\Rightarrow y''' - y$  est paire

Soit  $a_n(y)$  les coefficients de Fourier de  $y$  et  $a_n(y'')$  et les coefficients de Fourier de  $y''$ .

$y$  est de classe  $C^2$  et  $2\pi$  - périodique alors  $y(0) = y(2\pi)$ ,  $y'(0) = y'(2\pi)$  et  $y''(0) = y''(2\pi)$

$$\begin{aligned} \triangleright a_n(y'') &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y''(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \underbrace{[y'(x) \cos nx]_0^{2\pi}}_0 + n \int_0^{2\pi} y'(x) \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{n}{\pi} \left[ \underbrace{[y(x) \sin nx]_0^{2\pi}}_0 - n \int_0^{2\pi} y(x) \cos nx \, dx \right] = -n^2 a_n(y) \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

$$\triangleright a_0(y'') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y''(x) \, dx = \frac{1}{\pi} [y'(x) \cos nx]_0^{2\pi} = 0$$

1) **01pt** En remplaçant dans (E) on obtient :

$$a_n(y'' - 3y) = a_n(y'') - 3a_n(y) = -(n^2 + 3)a_n(y) = a_n(f) \quad \forall n \geq 0$$

$$\text{D'où } a_n(y) = \frac{-a_n(f)}{(n^2+3)} \quad \forall n \geq 0 \quad \text{Ainsi : } y(x) = -\frac{2\pi^2}{9} - 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n^2+3)} \cos nx$$

La solution générale de (1) s'écrit :  $y(x) = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} - \frac{2\pi^2}{9} - 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n^2+3)} \cos nx$   
 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

### **Exercice 03 :** 06 pts Nature des intégrales impropres

**02.5 pts**  $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x| \, dx}{\sqrt{(x+5)\arctan x^2}} = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx.$

- $f(x) \underset{v(0)}{\approx} \frac{|x|}{\sqrt{5x^2}}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = 0$  n'est pas un point singulier pour  $f$ .
- $f(x) \geq \frac{\sin^2 x}{\sqrt{(x+5)\arctan x^2}} = \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{(x+5)\arctan x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x+5)\arctan x^2}} - \frac{\cos 2x}{\sqrt{(x+5)\arctan x^2}} = g(x) - j(x)$   
 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+5)\arctan x^2}} \underset{v(+\infty)}{\approx} \frac{k}{x^{\frac{1}{2}}}$  avec  $k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5\pi}}$  alors  $\int_0^{+\infty} g(x) \, dx$  diverge.  
 $j(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{(x+5)\arctan x^2}}$ , on applique le critère d'Abel pour  $\int_0^{+\infty} j(x) \, dx$
- on pose  $j(x) = l(x)h(x)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x > 0, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+5)\arctan x^2}} \searrow \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \\ \forall x'', x' \in \mathbb{R}^+ \quad \left| \int_{x'}^{x''} l(x) \, dx \right| \left| \int_{x'}^{x''} \cos 2x \, dx \right| = \frac{1}{2} |\sin 2x'' + \sin 2x'| \leq 1 \end{array} \right.$$

Alors  $\int_0^{+\infty} j(x) \, dx$  converge ; ainsi  $I_1$  diverge.

**02pts.**  $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(x) \, dx}{\sqrt{\pi - 2 \arcsin x}} = \int_0^1 f(x) \, dx$

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$  est un point singulier pour  $f$ .
- Le développement de  $\arcsin x$  au voisinage de 1 :

$$\sin t \underset{v(\frac{\pi}{2})}{\approx} 1 - \frac{(t - \frac{\pi}{2})^2}{2} \text{ alors } (t - \frac{\pi}{2})^2 \underset{v(\frac{\pi}{2})}{\approx} 2(1 - \sin t)$$

d'où  $|t - \frac{\pi}{2}| \sim \sqrt{2(1 - \sin t)}$ , en posant  $x = \sin t$   $0 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} - t \sim \sqrt{2(1 - \sin t)} \quad \text{d'où } t = \arcsin x \sim \frac{\pi}{2} - \sqrt{2(1 - x)}$$

$$\ln x \underset{v(1)}{\approx} x - 1 \text{ alors } f(x) \underset{v(1)}{\approx} -\frac{(1-x)^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ n'est pas un point singulier.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{\sqrt{\pi}} = 0 \Rightarrow I_2 \text{ converge.}$$

**1,5pts**  $I_3 = \int_0^{+\infty} 1 + 2x^2 \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \, dx = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx..$

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 1 \Rightarrow x = 0$  n'est pas un point singulier pour  $f$ .
- $f(x) = 1 - x^2 \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = 1 - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{v(+\infty)}{\approx} 1 - x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4}\right)$
- $f(x) \underset{v(+\infty)}{\approx} \frac{1}{2x^2}, \alpha = 2 > 1$  Alors  $I_3$  converge.