Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2 Math : Analyse III

06/12/18

CONTROLE CONTINU (durée 02h)

<u>Exercice 1 :</u> (06pts)

Etudier la nature et calculer en cas de convergence la somme des séries :

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{chnx}{2^n(chx)^n}$. $(x\in\mathbb{R})$ 2) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{lnn}\left(\sum_{n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)$ 3) $\sum_{n\geq 1}(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

<u>Exercice 2 :</u> (06pts)

1. Soit $\boldsymbol{u_n(x)}=\frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}(\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}$ $x\in\mathbb{R}$ $n\geq 1$. On pose $\boldsymbol{v_n(x)}=\boldsymbol{u'_n(x)}$ **.**

Déterminer le rayon R et le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1}\boldsymbol{u_n(x)}$

2. Calculer la somme $V(x)=\sum_{n\geq 1}\boldsymbol{v_n(x)}$ et $\int_{\frac{1}{3}}^{x}V(t)\,dt$ $pour$ $\left|x-\frac{1}{3}\right|<R$.

en déduire la somme $U(x)=\sum_{n\geq 1}\boldsymbol{u_n(x)}$ et S = $\sum_{n\geq 1}\frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}$.

Combien faut –il prendre de termes dans la série pour obtenir une valeur approchée de S à 10^{-2}prés et préciser le signe de l'erreur.
3. En utilisant la décomposition en éléments simples de $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}$, retrouver la somme $U(x)$.

<u>Exercice 03 :</u> (08 pts)

I. Soit la <u>suite</u> de fonctions définie par $f_n(x)=thx-th(n+1)x$, $x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$.

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la <u>suite</u> $\left(f_n(x)\right)_n$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^*$.

2) Déterminer le plus grand intervalle de convergence uniforme inclus dans $\mathbb{R}^+$.

3) Calculer $lim_{n\to+\infty}\int_0^a f_n(x)\,dx$ et $\int_0^a lim_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx$ $a>0$,conclure !

II. On considère la <u>série</u> de fonctions de terme général

$$u_n(x)=th(n+1)x-thnx,\ x\in\mathbb{R}\quad et\ n\geq 1\ .$$

1) Trouver le domaine de convergence D_c de la série $\sum_{n\geq 1}u_n(x)$.

2) Etudier la continuité de la somme $U(x)=\sum_{n\geq 1}u_n(x)$ dans D_c, en déduire la nature de convergence de la série sur D_c .

3) Etudier la convergence normale sur l'intervalle $[a,+\infty[$. $a>0$.

III. Soit la série de terme général $v_n(x)=nu_n(x)$, $x>0$.

1) Montrer que $\sum_{n\geq 1}v_n(x)$ est convergente pour tout $x>0$.

2) On pose $V(x)=\sum_{n\geq 1}v_n(x)$, montrer que : $\frac{1}{2(e^{2x}-1)}\leq V(x)\leq\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$.

(on donne $\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}$)

Corrigé

Exercice 1 : (06pts)

1)$(\mathbf{02,5pts})$ $u_n = \frac{chnx}{2^n (chx)^n} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^x}{2chx}\right)^n + \left(\frac{e^{-x}}{2chx}\right)^n\right] = \frac{1}{2}[{q_1}^n + {q_2}^n]$

avec $\begin{cases} q_1 = \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} & 0 < q_1 < 1 \\ q_2 = \frac{e^{-x}}{e^x+e^{-x}} & 0 < q_2 < 1 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}.$

Ainsi , la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *est la somme de deux séries géométriques convvergentes* alors elle converge $\forall x \in \mathbb{R}$ et a pour somme :

$$S = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} {q_1}^n + {q_2}^n = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1}{1-q_1} + \frac{q_2}{1-q_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{e^x}{2chx}}{1-\frac{e^x}{2chx}} + \frac{\frac{e^{-x}}{2chx}}{1-\frac{e^{-x}}{2chx}}\right) = ch2x.$$

2)$(\mathbf{02pts})$ $v_n = \frac{1}{lnn}\left(\sum_n^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) = \frac{R_{n-1}}{lnn}$. En utilisant le critère de comparaison avec l'intégrale :

- f(x)=$\frac{1}{x^2}$ $x \geq 2$,f est positive ,décroissante et continue .
- $\int_n^{+\infty} \mathrm{f(x)dx} = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{1}{x}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{n}$

(1pt)Alors $v_n \sim \frac{1}{nlnn}$,on utilise encore le critère de comparaison avec l'intégrale avec

- f(x)=$\frac{1}{xlnx}$ $x \geq 2$,f est positive ,décroissante et continue .
- $\int_2^{+\infty} \mathrm{f(x)dx} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{xlnx} = \int_{ln2}^{+\infty} \frac{du}{u} = [lnx]_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty$

(1pt)Alors $\sum_2^{+\infty} v_n$ diverge .

3) $(\mathbf{01,5pts})$ $w_n = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\sin\left(\pi\sqrt{\mathrm{n}^2+1}\right) = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\sin\left(\pi\mathrm{n}\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)^{1/2}\right).$

$w_n = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\sin\left(\pi\mathrm{n}(1+\frac{1}{2\mathrm{n}^2}+\frac{1}{\mathrm{n}^2}\varepsilon\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)\right)$ avec $\varepsilon\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right) \to 0$ qd $\mathrm{n} \to +\infty$

$w_n = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\sin\left(\pi\mathrm{n}+\frac{\pi}{2\mathrm{n}}+\frac{\pi}{\mathrm{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2\mathrm{n}}+\frac{\pi}{\mathrm{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)\right) \sim \frac{\pi}{2\mathrm{n}}.$

$\sum_1^{+\infty} \frac{\pi}{2\mathrm{n}}$ est une série de Riemman divergente. Alors $\sum_1^{+\infty} w_n$ diverge .

Exercice 2 : (06pts)

1. $\boldsymbol{u_n(x)} = \frac{(-1)^n(3x-1)^{2n}}{n(2n-1)} = \frac{(-1)^n 3^{2n}\left(x-\frac{1}{3}\right)^{2n}}{n(2n-1)} = \sum_1^{+\infty} a_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^{\boldsymbol{n}}$ $\begin{cases} a_{2n} = \frac{(-1)^n 3^{2n}}{n(2n-1)} \quad a_{2n+1} = 0 \\ \boldsymbol{x_0} = \frac{1}{3} \end{cases}$

(1pt) Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \boldsymbol{u_n(x)}$

- $|\, a_{2n}|^{\frac{1}{2n}} = \frac{3}{[n(2n-1)]^{\frac{1}{2n}}} \to \mathbf{3}$ qd $\mathrm{n} \to +\infty$
- $|\, a_{2n+1}|^{\frac{1}{2n+1}} = 0 \to \mathbf{0}$ qd $\mathrm{n} \to +\infty$
- $limsup_{\mathrm{n}\to+\infty}|\, a_n|^{\frac{1}{n}} = 3$, alors le rayon $R = \frac{1}{3}$

(1pt) Le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 1} \boldsymbol{u_n(x)}$

- $\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \boldsymbol{u_n(x)}$ converge.
- $\left|x-\frac{1}{3}\right|>\frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \boldsymbol{u_n(x)}$ diverge.
- $\left|x-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$, $|\boldsymbol{u_n(x)}| = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n(2n-1)}} \sim \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2n^2}} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \boldsymbol{u_n(x)}$ converge absolument

  $Ainsi\ D_c = \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

2. (0.5pt) $V(x) = \sum_{n\geq 1} \boldsymbol{v_n(x)} = \sum_{n\geq 1} \boldsymbol{u'_n(x)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\boldsymbol{(-1)^n 6(3x-1)^{2n-1}}}{\boldsymbol{(2n-1)}} = \boldsymbol{-6arctan(3x-1)}$,

Pour $\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{3}$, sachant que $\sum_{n\geq 0} \frac{\boldsymbol{(-1)^n X^{2n+1}}}{\boldsymbol{(2n+1)}} = \boldsymbol{arctan(X)}$ avec $|\boldsymbol{X}| \leq \boldsymbol{1}$

(1pt) $I = \int_{\frac{1}{3}}^{x} V(t)\ dt = -\int_{\frac{1}{3}}^{x} \boldsymbol{6arctan(3t-1)}\ dt = \int_0^{3x-1} -2arctanu\ du$: intég.par partie

$I = -[2u.arctanu]_0^{3x-1} - \int_0^{3x-1} \frac{2u}{1+u^2}\ du = -[2u.arctanu - ln(1+u^2)]_0^{3x-1}$.

$I = -2(\boldsymbol{3x-1}).arctan(\boldsymbol{3x-1}) + ln(1+(\boldsymbol{3x-1})^2)$.

(0.5pt) $U(x) = \sum_{n\geq 1} \boldsymbol{u_n(x)}$ $U'(x) = \sum_{n\geq 1} \boldsymbol{u'_n(x)} = V(x)$(on peut intégrer terme à terme une série entière) $U(x) - \underbrace{U\left(\frac{1}{3}\right)}_{0} = \int_{\frac{1}{3}}^{x} V(t)\ dt = I$

(0.5pt)D'aprés le second lemme d'Abel $S = \sum_{n\geq 1} \frac{\boldsymbol{(-1)^n}}{\boldsymbol{n(2n-1)}} = \lim_{\boldsymbol{x\to 0}} U(x) = -2arctan1 + ln2 = ln2 - \frac{\pi}{2}$

(0.5pt) $\sum_{n\geq 1} \frac{\boldsymbol{(-1)^n}}{\boldsymbol{n(2n-1)}}$est une série alternée ,son reste vérifie :$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)(\boldsymbol{2n+1})}$

$$\frac{1}{(n+1)(\boldsymbol{2n+1})} \leq 10^{-2}\ pour\ n \geq 7$$

(0.5pt) Le signe de l'erreur R_7 est le signe de son premier terme $\boldsymbol{u_8}$ donc positif

3. (01pt) En utilisant la décomposition en éléments simples :

$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n(2n-1)}} = \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{(2n-1)}}$ =, $U(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\boldsymbol{(-1)^n(3x-1)^{2n}}}{\boldsymbol{n(2n-1)}} = -\sum_{n\geq 1} \frac{\boldsymbol{(-1)^n(3x-1)^{2n}}}{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{2}\sum_{n\geq 1} \frac{\boldsymbol{(-1)^n(3x-1)^{2n}}}{\boldsymbol{(2n-1)}}$

$= ln(1+(\boldsymbol{3x-1})^2) - 2(\boldsymbol{3x-1}).arctan(\boldsymbol{3x-1})$ pour $|\boldsymbol{3x-1}| < 1$,sachant que :

$\sum_{n\geq 1} \frac{\boldsymbol{X^n}}{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{-Ln(1-X)}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\boldsymbol{(-1)^n X^{2n-1}}}{\boldsymbol{(2n-1)}} = \boldsymbol{arctanX}$ pour $|\boldsymbol{X}| < 1$.

<u>**Exercice 03 :**</u> (08 pts)

I. 1) (1.25pt)**Convergence simple** : $f_n(x) = thx - th(n+1)x$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

$$lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} thx - 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ thx + 1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

La suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f .

- (0.25pt) $lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 \neq f(0)\ alors\ f$ n'est pas continue au point x=0 .
- (0.5pt) Comme la suite $(f_n)_n$est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, alors la convergence n'est pas uniforme dans $\mathbb{R}$.
- (0.5pt) Dans $\mathbb{R}^*$, soit la suite $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^*$ $x_n = \frac{1}{n+1}$ $lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = 1 \neq 0$

Alors la convergence n'est pas uniforme dans $\mathbb{R}^*$.

2) (0.75pt) Le plus grand intervalle de convergence uniforme inclus dans $\mathbb{R}^+$ est $[a, +\infty[$,en effet :$\forall x \in [a, +\infty[, \quad |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{2e^{-2(n+1)x}}{1+e^{-2(n+1)x}}\right| \leq 2e^{-2(n+1)a} \to 0 \; n \to +\infty$

$$alors \quad lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\| = 0$$

3)(01pt) $\int_0^a f_n(x)\,dx = \int_0^a thx - th(n+1)x\,dx = \left[ln(chx) - \frac{ln(ch(n+1)x)}{(n+1)}\right]_0^a =$

$= ln(cha) - \frac{ln(ch(n+1)a)}{(n+1)} \to ln(cha) - a \;\; n \to +\infty \; car \; \frac{ln(ch(n+1)a)}{(n+1)} \overset{v(+\infty)}{\approx} \frac{ln(e^{(n+1)a})}{(n+1)} = a$

$\int_0^a \; lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^a thx - 1\,dx = [ln(chx) - x]_0^a = ln(cha) - a$

(0.25pt) $On\ remarque$ que : $\; lim_{n\to+\infty} \int_0^a f_n(x)\,dx = \int_0^a \; lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$ et pourtant la convergence n'est pas uniforme sur $[0, a]$. L'égalité des intégrales n'implique pas la convergence uniforme de la suite de fonctions. (La réciproque du critère d'intégrale est fausse)

II. $\quad u_n(x) = th(n+1)x - thnx, \; x \in \mathbb{R} \quad et\ n \geq 1$.

1) La série $\sum_{n\geq1} u_n(x)$ est une série télescopique.

(01pt) $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = th(n+1)x - thx = -f_n(x)$, alors Le domaine de convergence $D_c = \mathbb{R}$.

2)(0.5pt) $\mathrm{U}(x) = \sum_{n\geq1} u_n(x) = \; lim_{n\to+\infty} S_n(x) = -f(x)$ qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, comme la série $\sum_{n\geq1} u_n(x)$ est une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, alors la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

3) $01pt)\ Soit\ a > 0, \; \|u_n\| = sup_{[a,+\infty[}|u_n(x)| = sup_{[a,+\infty[} th(n+1)x - thnx$

La fonction th(.) est croissante dans $\mathbb{R}$ ($th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$), ainsi

$\forall x \geq a \quad thnx \geq thna \quad et\ th(n+1)x \leq 1 = \; lim_{x\to+\infty} th(n+1)x$

Alors $\|u_n\| \leq 1 - thna = \frac{2e^{-na}}{e^{na}+e^{-na}} \leq 2e^{-na} = C_n = 2(e^{-a})^n$

$\sum \; C_n$est une série géométrique convergente alors $\sum \; \|u_n\|$ converge ou $\sum_{n\geq1} u_n(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$

III. $\quad v_n(x) = nu_n(x)\ , x > 0.$

1) (0.5pt) $\forall x > 0 \quad 0 \leq v_n(x) \leq 2ne^{-nx} = b_n\ , \; lim_{n\to+\infty}(b_n)^{\frac{1}{n}} = e^{-x} < 1 \Rightarrow \sum \; b_n$ converge.

Alors $\sum_{n\geq1} v_n(x)$ est convergente pour tout $x > 0$.

2)(0.5pt) $v_n(x) = n\left(\frac{e^{(n+1)x} - e^{-(n+1)x}}{e^{(n+1)x} + e^{-(n+1)x}} - \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}\right) = 2n\frac{(e^x - e^{-x})e^{-(2n+1)x}}{(1+e^{-2(n+1)x})(1+e^{-2nx})}$

$v_n(x) \leq 2n(1 - e^{-2x})e^{-2nx} \Rightarrow \sum_{n\geq1} v_n(x) \leq 2\frac{(1-e^{-2x})e^{-2x}}{(1-e^{-2x})^2} \leq \frac{2e^{-2x}}{e^{-4x}(e^{2x}-1)^2} = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

$v_n(x) \geq \frac{n(1-e^{-2x})e^{-2nx}}{2} \Rightarrow \mathrm{V}(x) \geq \frac{(1-e^{-2x})e^{-2x}}{2(1-e^{-2x})^2} = \frac{1}{2(e^{2x}-1)}$.

Ainsi on a: $\frac{1}{2(e^{2x}-1)} \; \leq \; \mathrm{V}(x) \leq \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$.