



Analyse III - Epreuve finale (Sujet +corrigé)

Exercice 01 : 04,5 pts

- Développer en série entière autour de l'origine la fonction $f(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$.
En déduire le développement de $g(x) = \ln\sqrt{1+x+x^2}$. Préciser le rayon de convergence de la série obtenue.
- Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge et donner sa valeur sous forme de série.

Exercice 02 : 07,5 pts

- Pour tous $p > 0, \alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $\varphi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin xt}{t^\alpha} dt$
 - Montrer que l'intégrale $\varphi(p)$ est convergente $\forall p > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 2$.
 - Montrer que $\varphi(p)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$ en déduire la continuité de $\varphi(p) \forall p > 0$.
- On considère la fonction de la variable réelle $x : \psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin xt}{t} dt, p > 0$.
 - Montrer que la fonction $\psi(x)$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - Calculer $\psi'(x)$, en déduire l'expression de $\psi(x)$ sans le signe intégrale.
 - Trouver la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Exercice 03 : 08 pts

- On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, impaire et de période $P = \pi$ et telle que $f(x) = \sin x \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
 - Dessiner le graphe de f (on prendra au moins $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$).
 - Calculer la série de Fourier associée à f et étudier sa convergence. Converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R} ?
 - Calculer les sommes : $S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n \sin 2n}{4n^2 - 1}, S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (2n-1)}{16n^2 - 8n + 3}$ et $S_3 = \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}$,
 - On cherche une solution particulière $y = y(x)$ de l'équation différentielle $(E) : y'' - y = f(x)$ telle que y est de classe C^2 sur \mathbb{R} et de période π .
 - Justifier que y est développable en série de Fourier de période π .
 - Soient $a_n(y)$ et $b_n(y)$ les coefficients de Fourier de y et $a_n(y'')$ et $b_n(y'')$ les coefficients de Fourier de y'' .
 - Vérifier que $b_n(y'') = -4n^2 b_n(y) \forall n \geq 1$
 - Montrer que si y est solution de (E) alors $a_n(y) = 0 \forall n \geq 0$ et $(1 + 4n^2)b_n(y) = -b_n(f) \forall n \geq 1$
- où $b_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f . En déduire une solution particulière y de l'équation (E) sous forme de série de Fourier.

Exercice 01 : 04,5 pts

1. 03 pts

• $f(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2} = \frac{(1+2x)(1-x)}{1-x^3} = (1+x-2x^2) \sum_{n \geq 0} x^{3n}$ avec $|x| < 1 = R$.

$f(x) = \sum_{n \geq 0} x^{3n} + x^{3n+1} - 2x^{3n+2} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$: $\begin{cases} a_{3n} = 1 \\ a_{3n+1} = -1 \\ a_{3n+2} = -2 \end{cases}$ de rayon de

convergence $R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

• $g(x) = \ln \sqrt{1+x+x^2}$ $g'(x) = \frac{1}{2} f(x)$ et $g(0) = 0$

D'où $g(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x \sum_{n \geq 0} t^{3n} + t^{3n+1} - 2t^{3n+2} dt = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{3n+2}}{3n+2} - 2 \frac{x^{3n+3}}{3n+3}$

de rayon de convergence est le même que celui de f ie $R=1$.

2. 01.5pts $I = \int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx$ est défini donc converge car

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x+x^2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x=0$ n'est pas un pt singulier

$I = \int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n+\frac{1}{2}}}{3n+1} + \frac{x^{3n+\frac{3}{2}}}{3n+2} - 2 \frac{x^{3n+\frac{5}{2}}}{3n+3} dx$.

$= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left[\frac{x^{3n+\frac{3}{2}}}{(3n+1)(3n+\frac{3}{2})} + \frac{x^{3n+\frac{5}{2}}}{(3n+2)(3n+\frac{5}{2})} - 2 \frac{x^{3n+\frac{7}{2}}}{(3n+3)(3n+\frac{7}{2})} \right]_0^1$.

$I = \sum_{n \geq 0} \frac{2}{(3n+1)(6n+3)} + \frac{2}{(3n+2)(6n+5)} - \frac{4}{(3n+3)(6n+7)}$.

Exercice 02 : 04 pts

Soient $p > 0, \alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin xt}{t^\alpha} dt$

1. 02 pts $\varphi(p) = \int_0^{+\infty} f(p, t) dt$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(p, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x}{t^{\alpha-1}} = \infty$ si $\alpha > 1 \Rightarrow t=0$ est un point singulier (si $\alpha > 1$).

• $\varphi(p) = \underbrace{\int_0^1 f(p, t) dt}_{I_2' : 2^{\text{ème}} \text{ espèce si } \alpha > 1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(p, t) dt}_{I_2'' : 1^{\text{ère}} \text{ espèce}}$

• $\forall t > 0$ $f(p, t)$ est définie, continue et telle que :

$f(p, t) \sim \frac{x}{t^{\alpha-1}}$, alors $I_2' \begin{cases} \text{converge si } \alpha - 1 < 1 : \alpha < 2 \\ \text{diverge} & \alpha \geq 2 \end{cases}$

• $\forall p > 0, \alpha > 0, x \in \mathbb{R}$ et $\forall t \geq 1 \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 |f(p, t)| = 0$

alors I_2'' converge absolument donc converge simplement $\forall p > 0, \alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

Conclusion : L'intégrale $\varphi(p)$ converge $\forall p > 0, x \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 2$.

2. 02,5 pts Dans le cas : $0 < \alpha < 2$,

• $\forall p \geq a > 0$ et $\forall t \geq 1 \quad |f(p, t)| \leq e^{-at} = g(t)$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 g(t) = 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} g(t) dt$ converge

Analyse III Corrigé de l'épreuve finale

Alors I_2'' converge normalement $\forall p \geq a > 0$

- $\forall p \geq a > 0, \forall t: 0 < t < 1 \quad |f(p, t)| \leq \frac{1}{t^{a-1}} = h(t)$

$$0 < a < 2 \Rightarrow \int_0^1 h(t) dt \text{ converge}$$

Alors I_2'' converge normalement sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$.

Conclusion : L'intégrale $\varphi(p)$ converge normalement donc uniformément (par rapport à p) sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 2$.

Comme $f(p, t)$ est continue sur $[a, +\infty[\times]0, +\infty[$ et l'intégrale converge uniformément alors $\varphi(p)$ est continue sur $[a, +\infty[\forall a > 0$, ainsi pour tout $p \in]0, +\infty[$

ii. $\psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin xt}{t} dt, p > 0$

1. **02 pts**

i) $\exists x_0 = 0 \in \mathbb{R} : \psi(0) = 0$ converge

ii) $f(x, t) = e^{-pt} \frac{\sin xt}{t}$ et $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = e^{-pt} \cos xt$ sont continues sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$

iii) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq e^{-pt} = g(t)$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 g(t) = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$ converge normalement donc uniformément sur \mathbb{R} .

Conclusion : $\psi(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$.

2. **01 pt** $\psi'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos xt dt = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{-pt+ixt} dt = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-pt+ixt}}{-p+ix} \right]_0^{+\infty} =$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{p-ix} \right) = \frac{p}{p^2+x^2}$$

$$\psi(x) - \underbrace{\psi(0)}_0 = \int_0^x \psi'(t) dt = \int_0^x \frac{p}{p^2+t^2} dt = \int_0^x \frac{\frac{dt}{p}}{1+\left(\frac{t}{p}\right)^2} = \arctan\left(\frac{x}{p}\right).$$

3. **0.5pt** Pour $\alpha = 1$ et $x = 1$, $\psi(1) = \arctan\left(\frac{1}{p}\right) = \varphi(p)$, en utilisant la continuité

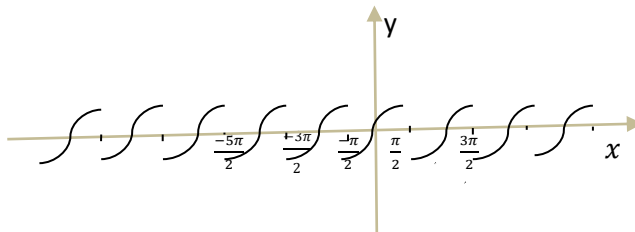
de φ on a : $\lim_{p \rightarrow 0^+} \varphi(p) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \lim_{p \rightarrow 0} e^{-pt} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Exercice 03 : 08pts

i.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, impaire et de période $P = \pi$ et telle que $f(x) = \sin x$

1) **01pt** le graphe de f :



2) **02,5 pts** $\frac{\pi}{2}$

• f est impaire alors $\forall n \geq 0 \quad a_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nx dx$.

$$\triangleright \forall n \geq 1 \quad b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(1-2n)x + \cos(1+2n)x dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left[\frac{\sin(1-2n)x}{(1-2n)} + \frac{\sin(1+2n)x}{(2n+1)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(1-2n)\frac{\pi}{2}}{(1-2n)} + \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)} \right] = \frac{8n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}$$

$$\triangleright S(f(x)) = \sum_{n \geq 1} \frac{8n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} \sin 2nx$$

- Comme le montre le graphe, la fonction f est impaire et de période π , continue partout sauf aux points $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Il est évident que les conditions de Jordan sont vérifiées à savoir

$$\begin{cases} (i) f \text{ est bornée dans } \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} |f(x)| \leq 1 \\ (ii) f \text{ est continue et croissante sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ alors } : \end{cases}$$

➤ $S(f(x)) = f(x) \quad \forall x \neq x_k$
 $S(f(x_k)) = \frac{f(x_k^+) + f(x_k^-)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = f(x_k)$
 Ainsi $S(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) **01,75pts** Calcul des sommes : $S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n \sin 2n}{4n^2 - 1}$, $S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (2n-1)}{16n^2 - 16n + 3}$ et $S_3 = \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}$,

✓ $S(f(1)) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} n \sin 2n}{4n^2 - 1} = f(1) = \sin 1 \Rightarrow S_1 = -\frac{\pi \sin 1}{8}$

✓ $S\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{4(-1)^n n \left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)}{4n^2 - 1} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (2n-1)}{16n^2 - 16n + 3} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$

$S_2 = -\frac{\pi \sqrt{2}}{16}$

➤ Application de l'égalité de Parseval : $\sum_{n \geq 1} b_n^2 = \frac{64}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = 1$; alors $S_3 = \frac{\pi^2}{64}$

II. **03pts**

Soit $y = y(x)$ une solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y'' - y = f(x)$

- 1) **0.5pt** Si y est de classe C^2 sur \mathbb{R} et de période 2π alors les conditions de Dirichlet sont satisfaits (y et y' sont continues donc continues par morceaux sur $[0, 2\pi]$) donc elle est développable en série de Fourier.

- 2) **01,5pts** Soient $a_n(y)$ et $b_n(y)$ les coefficients de Fourier de y et $a_n(y'')$ et $b_n(y'')$ les coefficients de Fourier de y'' .

y est de classe C^2 et 2π - périodique alors $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$ et $y''(0) = y''(2\pi)$

•
$$b_n(y'') = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y''(x) \sin 2nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\underbrace{[y'(x) \sin 2nx]_0^\pi}_0 - 2n \int_0^\pi y'(x) \cos 2nx dx \right]$$

$$= \frac{-4n}{\pi} \left[\underbrace{[y(x) \cos 2nx]_0^\pi}_0 + 2n \int_0^\pi y(x) \sin 2nx dx \right] = -4n^2 b_n(y) \quad \forall n \geq 1.$$

- 2) **01pt** Comme f est impaire ; il est évident de chercher une solution y de (E) qui soit impaire car : y est impaire $\Rightarrow y''$ impaire $\Rightarrow y'' - y$ impaire : ainsi $a_n(y) = 0$

et $b_n(y'' - y) = b_n(y'') - b_n(y) = -(1 + 4n^2)b_n(y) = b_n(f) \quad \forall n \geq 1$

D'où $b_n(y) = \frac{-b_n(f)}{(1 + 4n^2)} \quad \forall n \geq 1$ Ainsi : $y(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{8n(-1)^{n+1}}{\pi(16n^4 - 1)} \sin 2nx$